Caracterización del estimador de la clase k en modelos econométricos de ecuaciones simultáneas[1]

José F. Burguete[2] y Esteban Burguete[3]

RESUMEN

En este trabajo se presenta la caracterización geométrica directa del método de estimación de la Clase k en modelos de ecuaciones lineales simultáneas, usando el concepto de proyector oblicuo. En particular, si el model es

$$Y\Gamma + X\beta = E$$

entonces, el estimador sería

$$y_{jk} = P_{[Y_j,X_j].[(I-P_X^{\perp}k)Y_j,X_j]^{\perp}}\, y_j \,.$$

Por otra parte, se exhiben diferentes estimadores que pueden generarse al proyectar a lo largo de subespacios de todo el espacio a lo largo de lo que se proyecta en esta clase.

ABSTRACT

This paper presents the direct geometric characterization of the k-Class estimation method in a linear simultaneous equation model. The concept of oblique projector is used. In particular, if the model is

$$Y\Gamma + X\beta = E,$$

the estimator is

$$y_{jk} = P_{[Y_j,X_j]-[(I-P_X^{\perp}k)Y_j,X_j]^{\perp}}\, y_j \,.$$

The paper also exhibits several estimators generated by projecting along subspaces of the whole space along which this class is projected.

INTRODUCCIÓN

Los investigadores que trabajan en economía agrícola y tienen interés en ajustar un modelo lineal de ecuaciones simultáneas (MES), frecuentemente tienen problemas con las estadísticas generadas debido a los signos cambiados o a la no significación de las estimaciones de los

[1]Manuscrito sometido a la Junta Editorial el 29 de diciembre de 1989.

[2]Profesor Visitante. Departamento de Economía Agrícola y Sociología Rural, Universidad de Puerto Rico, Mayagüez, Puerto Rico. Profesor Investigador Titular, Centro de Estadísticas y Cálculo. Colegio de Postgraduados, Chapingo, México.

[3]Profesor Auxiliar, Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Mayagüez, Puerto Rico.

parámetros. También es común tener coeficientes de determinación pequeños y ocasionalmente negativos (1). Estas situaciones pueden presentarse en las estimaciones de los MES al usar los métodos de estimación de variables instrumentales.

La mayoría de los métodos de estimación en los MES son métodos que pueden caracterizarse por el concepto de variables instrumentales. En diversas investigaciones y textos de econometría Burguete (2) y Theil (6), Wonnacott and Wonnacott (7) se presenta la geometría de estos métodos en las etapas que los integran. La caracterización en una etapa es relevante para poder observar la problemática citada.

En este trabajo se presenta la caracterizáción directa de los métodos de estimación en los MES. Con tal propósito se usa el concepto de proyector oblicuo. Finalmente muestran la riqueza de estimadores que se pueden generar al usar la formalización teórica de estas ideas.

Método de estimación de la Clase k

El método de estimación de la Clase k se ha descrito en el contexto de los MES. Un MES tiene la forma funcional

$$Y\Gamma + X\beta = E,$$

de donde, la estructura de los errores presenta una correlación contemporánea y no una temporal. La j-éstima ecuación está definida por

$$\begin{aligned} y_j &= Y_j\Gamma_j + X_j\beta_j + \epsilon_j \\ &= Z_j\delta_j + \epsilon_j. \end{aligned}$$

El estimador de la Clase K de los parámetros δ_j es:

$$\delta_{jk} = \begin{bmatrix} Y_j'(I-kP_x^{\perp})Y_j & Y_j'X_j \\ X_j'Y_j & X_j'X_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_j'(I-kP_x^{\perp})y_j \\ X_j'y_j \end{bmatrix}$$

de donde, $P_x^{\perp} = I - X(X'X)^{-1}X'$. El estimador es $y_{jk} = Z_j\delta_{jk}$. Sawa (4) ha discutido sus propiedades en muestras finitas.

Por otra parte, puede verificarse de manera simple que y_{jk} es un estimador de variables instrumentales si se usa como instrumento a $W_j = [(I-kP_x^{\perp})Y_j, X_j]$. Por tanto, $y_{jk} = Z_j(W_j'Z_j)^{-1}W_j'y_j$.

Este procedimiento de estimación de información limitada incluye como casos particulares a los estimadores generados por los métodos de mínimos cuadrados ordinarios, mínimos cuadrados en dos etapas y máxima verosimilitud, entre otros.

Proyecciones oblicuas

La caracterización de un proceso de estimación por medio de su geometría, enriquece el instrumental de análisis al incorporar su teoría, axiomáticamente consistente. Además, presenta características didácticas deseables. El concepto fundamental utilizado en esta sección es el de proyección sobre un espacio a lo largo de otro. Al operador que hace posible este proceso se le denomina proyector.

Definición. Sean V_1, V_2,..., V_n subespacios disjuntos de E^n. La correspondencia $P_{Vi\text{-}V(i)}$ de y en y_i se define como un proyector sobre V_i a lo largo de $V_{(i)} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_{i-1} \oplus V_{i+1} \oplus \ldots \oplus V_n$.

El siguiente lema caracteriza la forma del proyector, el cual fue presentado por Rao y Yanai (3).

Lema 1. Las condiciones necesarias y suficientes para que $P_{Vi.V(i)}$ sea un proyector sobre V_i a lo largo de $V_{(1)}$ son:

a) $P_{Vi.V(i)}\, x = x$, si $x \epsilon V_j$.
b) $P_{Vi\cdot V(i)}\, x = 0$, si $x \epsilon V_{(i)}$.▲

Para presentar al estimador de la Clase k en términos de una proyección, se requiere establecer que los espacios que intervienen sean disjuntos. El siguiente lema identifica esta formulación.

Lema 2. Sean V_1 y V_2 dos matrices n x p, tal que $R(V_2) = p$ y $(V_1'V_2)^{-1}$ existe. Entonces $S(V_2) \cap S^{\perp}(V_1) = \phi$. (Donde $S(\cdot)$ denota el espacio generado).
Prueba: Como

$$p = R(V_1'V_2)^{-1} = R(V_1'V_2) \leq \min\{R(V_1), R(V_2)\}$$
$$\leq R(V_1) \leq p.$$

se concluye que V_1 y V_2 pueden considerarse bases de los espacios respectivos. Supóngase que $S(V_2) \cap S^{\perp}(V_1) \neq \phi$, por lo que existe $x \neq 0$, tal que $x \epsilon S^{\perp}(V_1)$ y $x \epsilon S(V_2)$.

Por lo tanto, s ix $= V_2 \propto$ para alguna $\propto \neq 0$, entonces $0 = V_1'x = V_1'V_2\propto$, pero $0 = (V_1'V_2)^{-1}\, 0 = (V_1'V_2)^{-1} V_1'V_2 \propto = \propto$. Contradicción •▲

Por otra parte, es claro que $P_{Vi\cdot V(l) \cup V(m)}$ es diferente a $P_{Vi.V(l)}$ donde $V_{(l)}$ y $V_{(m)}$ son subespacios de $V_{(i)}$, en virtud de que $V_{(m)}$ no necesariamente es ortogonal a V_i según Takeuchi y cols. (5).

RESULTADOS

Con los antecedentes establecidos, la formulación de los estimadores de la Clase k en términos de proyecciones oblicuas es fácilmente presentable.

Resultado 1. El estimador de la Clase ke tiene la forma siguiente:

$$Y_{jk} = P_{[Yj,Xj]\cdot[(I-kP_x^{\perp})Yj,Xj]^{\perp}}\, y_j\cdot$$

Prueba: Dado que el inverso existe, los espacios son disjuntos, por el Lema 2. Aplicando el Lema 1, y usando como instrumento a $W_j = [(I\text{-}kP_x^{\perp})Y_j, X_j]$ se obtiene el resultado deseado.▲

El siguiente enunciado constituye una ampliación de la Clase k de estimadores.

Resultado 2. Nuevos estimadores con la forma de los estimadores de la Clase k pueden generarse proyectando sobre $(Y_j, X_j]$ a lo largo de algún subespacio de $[(I-P_x^{\perp}k)Y_j,\ X_j]$, por ejemplo $V_{(l)}$. i.e.:

$$y_{jk} = P_{[Y_j,\ X_j]\cdot V_{(l)}} y_j^{\bullet\blacktriangle}$$

Esta proposición de nuevos estimadores enriquece la Clase de estimadores k, permitiendo que algunos estimadores sean consistentes desde el punto de vista de la teoría económica, aun cuando se pierdan algunas propiedades estadísticas.

BIBLIOGRAFÍA

1. Basmann, R. L., 1962. Letter to the Editor. *Econometrica* 30 (4): 824-26.
2. Burguete, J. F., 1989. Hacia el Establecimiento de una Geometría en Modelos de Ecuaciones Simultáneas. *Agrociencia*. (Aceptado para publicación).
3. Rao, C. R. y H. Yanai, 1979. General Definition and Decomposition of Projectors and Some Applications to Statistical Problems. JSPI 3, 1-17.
4. Sawa, T., 1972. Finite-sample properties of the k-Class estimators. *Econometrica* 40, 653-80.
5. Takeuchi, K., H. Yanai and B. N. Mukherjee, 1982. The Foundations of Multivariate Analysis. Halsted Press, New York.
6. Theil, H., 1971. Principles of Econometrics. J. Wiley and Sons. New York.
7. Wonnacott, R. J. and T. H. Wonnacott, 1970. Econometrics. J. Wiley and Sons, New York.