

JULIA D. VELA DE SEVILLANO
CATEDRÁTICA AUXILIAR DE PEDAGOGÍA
UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO

El nuevo enfoque de la enseñanza de matemáticas en la escuela secundaria

Al siglo XX se le ha llamado la Edad de Oro de las matemáticas por el gran número de investigaciones que se han realizado y los muchos libros de matemáticas que se han escrito. Esto ha traído como consecuencia una revolución en éstas con la introducción de nuevos temas en la matemática pura, tales como álgebra abstracta, la topología, el análisis funcional, la teoría del espacio de Hilbert y otros. No es éste el momento oportuno para entrar en las discusiones de estas materias, las cuales están reservadas para estudios graduados y muy especialmente para los matemáticos; pero sí es necesario señalar que los cambios ocurridos son el resultado de la investigación intensa. Esta ha sido tan profunda como la que se ha llevado a efecto en química, en física y biología.

Otra de las razones fundamentales para esta revolución en las matemáticas ha sido la mecanización. El teléfono automático, el piloto automático, los proyectiles dirigidos, los satélites puestos en órbita alrededor de la tierra y las máquinas de computar, demuestran que vivimos en un mundo mecanizado. El hombre tiene que diseñar estas máquinas, tiene que construirlas y ponerlas a funcionar. Esta revolución tecnológica que está en progreso, requiere la introducción de nuevas materias en el currículo de matemáticas de la escuela secundaria para así preparar mejor a nuestra juventud para la época en que vivimos.

Conscientes de esta situación, varias agencias nacionales han contribuido con grandes sumas de dinero para ayudar en el desarrollo de nuevos currículos de matemáticas. Por ejemplo, la Fundación Carnegie ha contribuido con \$500,000 para el proyecto en la Universidad de Illinois, y la Fundación Nacional de Ciencia ha donado \$4 millones al *School Mathematics Study Group*. Otros proyectos que se han venido desarrollando son el de la Universidad de Maryland, el de Boston College, el de Ball State Teachers College y el de Southern Illinois University.

A pesar de que existen diferencias entre estos programas, todos tienen elementos en común que proveen para el mejoramiento de la instrucción en matemática. Los temas nuevos que se han introducido en estos cursos experimentales vienen a entrelazarse con los principios básicos de la aritmética tradicional, de manera que existe una fusión de lo viejo y lo nuevo, lo cual hace que los cursos resulten de gran interés para los estudiantes. Las ideas matemáticas que se recalcan a través de los cursos desde los grados 7 al 12 son las siguientes:

- 1- Los sistemas de numeración
- 2- Las operaciones básicas y operaciones inversas
- 3- La estructura de los sistemas de números
- 4- El desarrollo progresivo del sistema de números reales
- 5- Las medidas
- 6- La representación gráfica
- 7- Las estadísticas y la probabilidad
- 8- Las deducciones lógicas
- 9- Las generalizaciones válidas
- 10- La teoría elemental de conjuntos y el lenguaje apropiado

Conjuntos

La teoría de los conjuntos es una materia de nivel colegial

que se debe introducir en forma elemental en la escuela secundaria. La palabra “conjunto” significa colección, agregado, grupo de cosas que tienen una característica en común. Los objetos que componen el “conjunto” se llaman elementos de conjunto. Desde que el niño empieza a contar, está usando la idea de conjunto. Cuando el niño dice, “tengo cuatro años” lo indica mostrando cuatro dedos de su mano; cuando él reconoce que para cada alumno del salón corresponde una silla y para cada silla corresponde un alumno, él está usando el concepto de conjuntos. Estas son las primeras experiencias con los números y de aquí surgen los números cardinales. El símbolo “4” representa un conjunto de cuatro elementos. En la escuela intermedia se introduce el concepto con el conjunto de números naturales $\{1,2,3,4, \dots\}$ o sea, los números de contar. Luego se introduce el conjunto de números cardinales $\{0,1,3,4, \dots\}$; el conjunto de números racionales positivos; el de números enteros positivos, negativos y cero; el conjunto de números racionales incluyendo los positivos; los negativos y el cero y el conjunto de números irracionales. Así progresivamente se llega al conjunto de números reales. El concepto de conjunto y las operaciones elementales con conjuntos tales como intersección y unión y sus respectivos símbolos, \cap , \cup , se introducen desde el séptimo grado al estudiar los segmentos, los rayos, las semirrectas, los planos y el espacio. Más adelante se habla del conjunto de soluciones de una ecuación, de una inecuación, del conjunto de pares ordenados en el plano de coordenadas, del conjunto de puntos en el interior del círculo. Estos conceptos son para usarse en los cursos de matemáticas a medida que se va avanzando en los grados de escuela secundaria.

Estructura

Uno de los aspectos fundamentales común a todos los programas experimentales de matemáticas es el estudio de la *estructura*. Se entiende por estructura el estudio de los principios básicos o las propiedades comunes de un sistema de matemáticas. Esto es, tan pronto se habla del conjunto de números naturales $\{1,2,3,4, \dots\}$ se evalúa a la luz de las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, propiedad de cierre, elemento de identi-

dad en la suma, elemento de identidad en la multiplicación, el inverso aditivo y el inverso multiplicativo. Son éstas las propiedades básicas de los sistemas matemáticos. Así el estudiante va analizando los distintos conjuntos de números y determinando cuáles de esas propiedades son comunes a unos, a otros, o a todos.

Sistemas de numeración

Además de nuestro sistema decimal de numeración se estudian otros sistemas de numeración en otras bases, con el fin de desarrollar una mejor interpretación de nuestro sistema. Por ejemplo, en el sistema binario, todos los números de contar se pueden expresar con solamente dos símbolos, el 1 y el 0. Este es el sistema que se usa en las máquinas electrónicas para computar. Otros sistemas que se introducen en séptimo grado son el sistema "base siete" y el sistema "base cinco". Se estudian estos sistemas no con el fin de ser expertos en estas bases, sino para que se entienda mejor nuestro sistema decimal.

Operaciones fundamentales

En los nuevos programas de matemáticas se recalca el significado de las operaciones, siendo las básicas la suma y la multiplicación y siendo la resta y la división operaciones inversas de la suma y la multiplicación respectivamente. En los nuevos programas *no* se le dice a los estudiantes que sumar $5a + 3a$, es lo mismo que sumar 5 vacas + 3 vacas como tampoco se les dice que $5a + 3b$ no se pueden sumar por la analogía de 5 vacas y 3 caballos. Es indispensable la comprensión de los procesos fundamentales utilizando las propiedades de nuestro sistema de números y el significado de los procesos. En la suma de expresiones como $5a+3a$ se hace uso de la propiedad distributiva, la que los estudiantes ya conocen como una propiedad del conjunto de números racionales. De manera que $5a+3a= (5+3) a= 8a$. En el caso de la división, se demuestra que es el proceso inverso de la multi-

$$\frac{a}{b}$$
 plicación, pues cuando decimos $\frac{a}{b}$ — queremos significar que existe un número x que multiplicado por b es igual a a . El algoritmo de la división no es otro que el siguiente: $a \div b = r$ donde a es el

divisor, x es el cociente, r es el residuo y b es el dividendo. Es claro que a no puede ser cero.

Representaciones gráficas

En los nuevos programas, las representaciones gráficas juegan un papel importantísimo. Desde los primeros grados se inician los estudiantes en el uso de la recta numérica estableciendo una correspondencia entre los números racionales y los puntos en la recta numérica. En ella pueden apreciarse mejor las relaciones de “mayor que”, “menor que”, o “igual a”. Se utiliza la recta numérica para localizar un número y su inverso aditivo, como por ejemplo $+3$ y -3 . Se demuestra gráficamente el conjunto de soluciones de una ecuación o una inecuación y más adelante se demuestra gráficamente el conjunto de soluciones de éstas utilizando el plano de coordenadas. Ejemplos de esto último son las gráficas de los conjuntos de soluciones de las inecuaciones $a+b > 6$ y $a^2+b^2 < 16$.

Deducciones Lógicas

La palabra “prueba” es un término común en el vocabulario, tiene varios matices y significados en el uso diario, pero tiene un significado preciso y especial en matemáticas. La “prueba matemática” consiste de una serie de enunciados que se establecen con el fin de demostrar la validez de una conclusión. La “prueba”, según se concibe en la enseñanza de matemáticas en el nivel secundario, es un concepto que hay que desarrollar en la mente del alumno como una conclusión lógica del tipo “si-entonces” *if-then*. Si A es cierto, entonces B puede ser o no ser cierto, según el razonamiento lógico envuelto. Este razonamiento lógico debe iniciarse desde el séptimo grado con la desmostración de ciertos principios matemáticos que en la aritmética tradicional se aceptaban como reglas. Los nuevos programas de álgebra elemental recalcan la importancia de la prueba y las deducciones lógicas. Así pues, “la prueba” que en los programas tradicionales se reserva únicamente para usarse en el curso de geometría, en el cual se estudiaba ampliamente, ahora se inicia desde los primeros

niveles de la escuela intermedia. No tenemos la menor duda de que un estudiante que se inicia desde su temprana edad en el razonamiento lógico y se le enseña a llegar a conclusiones válidas por medio de la prueba deductiva, la prueba indirecta, o la prueba inductiva, se le está proveyendo el arma más potente que se puede desear: aquella que le capacitará para llegar a la abstracción matemática.

Hasta aquí he comentado sobre algunos elementos comunes de los nuevos programas de matemáticas, elementos que van desarrollándose progresivamente a través de los seis años de escuela secundaria. El programa regular que recomienda la "National Council of Teachers of Mathematics" es el siguiente:

Grado

- | | |
|-------|---|
| 7 y 8 | Matemática general— <i>Pueden usarse los cursos del S M S G</i> |
| 9 | Algebra |
| 10 | Geometría— <i>Del plano y del espacio—</i> |
| 11 | Matemática intermedia— <i>Algebra, dos terceras partes, trigonometría, una tercera parte—</i> |
| 12 | Estadísticas y Probabilidad— <i>un semestre—</i>
Funciones elementales — <i>un semestre—</i> |

Además de este programa regular hay otro que se recomienda para estudiantes talentosos, el Advanced Placement Program. En este programa los cursos se adelantan un año de manera que los estudiantes empiezan en octavo grado el curso de álgebra, en el undécimo grado se les da un semestre de geometría analítica y en duodécimo grado se estudia cálculo.

Resultados obtenidos con los nuevos programas

Los nuevos programas se han estado desarrollando en alrededor de 400 centros de la nación americana durante los últimos cuatro años lo que no permite una evaluación estadística completa, por ser limitado el tiempo en que se han venido ensayando. Sin embargo, se ha podido demostrar en los Estados Unidos, que los alumnos que han tomado estos cursos han hecho en las prue-

bas de matemáticas tradicional, tan buena labor como los alumnos que siguen los cursos tradicionales, y que han aprendido más acerca de los principios básicos de las matemáticas.

La escuela Superior e Intermedia de la Universidad de Puerto Rico, consciente de la necesidad de mejorar el currículo de matemáticas, de manera que nuestros estudiantes estén mejor preparados para enfrentarse a los retos que pueda presentarle la vida en esta segunda mitad del siglo XX, está en el proceso de ensayar nuevos cursos. Es con este fin que comenzamos, en el año del 1960—61 con dos cursos nuevos: *Mathematics for Junior High School*, Vol. I parts I and II y *Mathematics for High School Geometry*, Parts I and II. Estos cursos, que están bajo el proceso de ensayo en varias escuelas de la nación americana, fueron preparados por un grupo compuesto de educadores especializados en matemáticas y maestros de escuela secundaria — grupo conocido como el *School Mathematics Study Group* — que trabaja bajo los auspicios de la Fundación Nacional de Ciencias — *National Science Foundation*.

Las ideas básicas recalçadas en el texto *Mathematics for Junior High School* son: estructura de la aritmética desde un punto de vista algebraico; el sistema de números reales como un desarrollo progresivo, comenzando por los números naturales y los números cardinales; la geometría de posición y luego las relaciones métricas en geometría. Algunos aspectos de gran importancia en este nivel son las experiencias con y la apreciación de los conceptos abstractos, la importancia de la definición, el desarrollo del vocabulario preciso y la experimentación y prueba. A través del material estas ideas están asociadas con sus aplicaciones.

Descripción del procedimiento

El curso *Mathematics for Junior High School del SMSG* fue puesto en práctica con un grupo de treinta y seis estudiantes del séptimo grado que en su mayoría estaba constituido por estudiantes sobre el nivel del promedio. A otro grupo de estudiantes del séptimo grado, con capacidad al nivel del promedio y bajo el nivel del promedio, se le dio el curso tradicional de aritmética. El

texto que se usó para este segundo grupo fue *Growth in Arithmetic*, Grado 7, de Clark, Smith and Moser. El criterio que se usó para clasificar a los estudiantes fue el índice académico del sexto grado y el examen de ingreso a la escuela intermedia.

Al mes de comenzadas las clases se le administró a ambos grupos una prueba de la serie *Metropolitan Achievement Test*. Se usó el *Intermediate Arithmetic Test*, con los resultados que se indican más adelante. Al finalizar el año, o sea ocho meses más tarde, se les administró, a ambos grupos la prueba *Advanced Arithmetic Test*, de la misma serie, con los resultados que también se señalan. Los objetivos que perseguimos, al administrar estas pruebas, fueron los siguientes:

1. Determinar el aprovechamiento de los alumnos con respecto a las destrezas matemáticas tradicionales.
En torno a ello nos preguntamos: ¿Le desarrolla el curso del SMSG estas destrezas básicas a los estudiantes?
2. Determinar el grado de aprovechamiento de los estudiantes con respecto a los conceptos matemáticos y a la solución de problemas. La pregunta que nos formulamos fue: ¿Contribuye el curso del SMSG al desarrollo de conceptos matemáticos en un grado mayor que los cursos tradicionales?

Descripción de los resultados

Los resultados obtenidos fueron satisfactorios desde el punto de vista de la madurez adquirida por los estudiantes para bregar con situaciones numéricas y el desarrollo de destrezas en las operaciones fundamentales de la aritmética.

Los exámenes tenían dos partes a saber:

1. (Test 1) — Operaciones fundamentales
2. (Test 2) — Conceptos y solución de problemas

El grupo del 7—1, obtuvo los siguientes resultados en la Prueba Intermedia administrada el 18 de octubre de 1960:

Grade Equivalent:	Test 1 $\bar{x}_1 = 7.342$	Test 2 $\bar{x} = 7.648$
	$\checkmark_2 = 5.2366$	$\checkmark = 1.223$
Percentile :	Test 1 $\bar{x} = 54.714$	Test 2 $\bar{x} = 58.885$
	$\checkmark = 23.663$	$\checkmark = 23.271$

En la Prueba Avanzada administrada el 12 de mayo de 1961 los resultados fueron los siguientes:

Grade Equivalent:	Test 1 $\bar{x} = 9.0314$	Test 2 $\bar{x} = 8.720$
	$\checkmark = .9549$	$\checkmark = 1.286$
Percentile :	Test 1 $\bar{x} = 77.629$	Test 2 $\bar{x} = 68.142$
	$\checkmark = 16.580$	$\checkmark = 20.631$

Los resultados del grupo 7—2 en la *Prueba Intermedia* administrada le 18 de octubre de 1960 fueron los siguientes:

Grade Equivalent:	Test 1 $\bar{x} = 6.695$	Test 2 $\bar{x} = 6.290$
	$\checkmark = .740$	$\checkmark = 1.048$
Percentile :	Test 1 $\bar{x} = 37.250$	Test 2 $\bar{x} = 31.175$
	$\checkmark = 21.063$	$\checkmark = 20.325$

En la prueba Avanzada administrada el 12 de mayo de 1961 los resultados fueron los siguientes en el grupo 7—2:

Grade Equivalent:	Test 1 $\bar{x} = 7.847$	Test 2 $\bar{x} = 5.517$
	$\checkmark = 3.556$	$\checkmark = 1.268$
Percentile :	Test 1 $\bar{x} = 54.117$	Test 2 $\bar{x} = 46.764$
	$\checkmark = 24.069$	$\checkmark = 21.957$

Estos resultados no nos aseguran que los estudiantes que estaban tomando el curso del SMSG adquirieron más conocimientos matemáticos ni desarrollaron más destrezas que los que estaban tomando el curso tradicional, pues siendo mejores estudiantes es de suponerse que tenían que hacer mejor examen. De haber sido los dos grupos semejantes, entonces sí podríamos establecer una buena comparación. Sin embargo, podemos notar que con el curso del SMSG los estudiantes del 7—1 mejoraron notablemente en ocho meses, lo cual es un indicio de que el curso les ayudó en el desarrollo de las destrezas básicas. Esta era una de nuestras preocupaciones al ensayar este nuevo curso.

No tenemos suficientes datos estadísticos para llegar a una

-
1. \bar{x} significa promedio
 2. \checkmark significa variación

conclusión válida debido a que los dos grupos con que se trabajó eran muy diferentes en potencialidad y preparación básica. Sin embargo, los resultados obtenidos nos animan a pensar que el curso SMSG fue de provecho para los estudiantes. Además de darle los conocimientos básicos de la aritmética les abrió el camino hacia el estudio de la estructura de nuestro sistema de números desde un punto de vista algebraico. A través del curso el estudiante fue desarrollando progresivamente el sistema de números reales y se familiarizó con los conceptos de geometría.

Continuación y ampliación del programa

Durante los años siguientes al 1960 se ha continuado en la Escuela Superior e Intermedia de la Universidad, la labor de ensayo de los nuevos cursos del SMSG. En el 1961 se le dio al grupo de octavo grado, que el año anterior había participado en el ensayo, el material del SMSG correspondiente en ese grado. A este mismo grupo de estudiantes se les han seguido dando los cursos del SMSG en álgebra elemental y matemática intermedia. Desde el 1960 se ha seguido usando el texto del SMSG para el curso de geometría que corresponde al décimo grado. Esta labor se ha estado realizando bajo la orientación del Dr. Fehr, profesor de la Universidad de Columbia que dirige el Departamento de la Enseñanza de Matemáticas en "*Teachers College*".

Nos proponemos continuar ampliando el programa de matemática moderna en la Escuela Superior e Intermedia de la Universidad. Durante el verano de 1963 se celebró un seminario dirigido por el Dr. Fehr con el fin de diseñar el programa de matemáticas para el undécimo grado. Una vez que estos cursos se pongan en práctica tendremos un programa completo de matemáticas para los seis grados de la escuela secundaria. El camino para mejorar la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria ha sido abierto, el patrón a seguir está claro y el material de instrucción está disponible. Lo que se presenta ahora es un reto a las autoridades para orientar a los maestros y prepararlos para establecer los nuevos programas que han de levantar el nivel de competencia matemática de nuestra juventud. Esta labor, aunque ardua, debe realizarse.