Pedagogía, 37 (2003-2004), 99-122

Los procesos de pensamiento de los estudiantes al usar los manipulativos Algeblocks y la Politabla Dreyfous en álgebra elemental

Wanda Villafañe Cepeda
Luz Maritza Fernández

Resumen

Esta investigación describe los procesos de pensamiento de tres estudiantes de noveno grado, que utilizaron los manipulativos Algeblocks y la Politabla Dreyfous en su aprendizaje sobre los métodos de factorización en álgebra elemental. Específicamente, se estudió: (1) procesos de pensamiento al factorizar polinomios usando manipulativos y su relación con la parte abstracta, (2) representaciones mentales al usar manipulativos en este tema, (3) obstáculos cognoscitivos que presentaron cuando utilizaron éstos para factorizar polinomios y los que presentaron cuando los factorizaron algebraicamente, (4) estrategias utilizadas para superar estos obstáculos. Se estudió, además, cómo los manipulativos les ayudó a realizar la transición de lo concreto a lo abstracto con relación al tema estudiado.

Descriptores: manipulativos, álgebra, desarrollo cognoscitivo, representaciones mentales de conceptos, factorización de polinomios

Abstract

The purpose of this investigation was to describe the thinking process of three ninth grade students, who used manipulative "Algeblocks" and the "Politabla Dreyfous" while learning the methods of factorization in elementary algebra. The following were specific aspects studied in the investigation: (1) thinking process when factorizing polynomials using manipulative and their relationship to the abstract level, (2) mental representations when using manipulatives related to this subject, (3) cognitive obstacles presented when factorizing polynomials and those presented when they are factorized algebraically, (4) strategies used to surpass these obstacles. In addition, how the manipulative helped them to make the transition from the concrete to the abstract level in regard to the studied subject.

Keywords: manipulatives, algebra, cognitive development, mental representations of concepts, factorization of polynomials.

Introducción

Los procesos de pensamiento de los estudiantes es un tema que ha recibido mucha atención en las investigaciones que se han realizado en el área de educación en matemáticas. En particular, Bush (1998) reseña algunos estudios que se llevaron a cabo sobre este aspecto, indicando que aunque éstos usualmente ofrecían sugerencias pedagógicas, su enfoque principal era en las construcciones cognoscitivas que los estudiantes realizaban cuando aprendían ciertos conceptos. Algunas de las investigaciones están relacionadas con el aspecto cognoscitivo y el aprovechamiento de los estudiantes. En particular, se estudió la relación entre el procesamiento de información, el nivel de desarrollo cognoscitivo y el aprovechamiento en matemáticas (Roberts,1990), el desarrollo conceptual al resolver ecuaciones lineales en una variable (Tsao,1995), los procesos de pensamiento de los estudiantes cuando solucionan problemas (Alfred, 1999; Chen, 1992; Clement, 1982; Days, Wheatley, y Kulm, 1979; Hsieh, 1995; Thompson, 1986; Webb, 1979).

Otras investigaciones relacionadas con los procesos de pensamiento se han desarrollado con estudiantes universitarios. En particular, Mertz (1990) describe y evalúa (usando un enfoque de proceso cognoscitivo), la naturaleza de las diferencias individuales en las destrezas aritméticas básicas, de estudiantes de nivel post – secundario. Bush (1998) llevó a cabo un estudio para explorar lo que entendían dos estudiantes universitarios sobre el tema de teoría de grupos. Finalmente, otras investigaciones relacionadas con el aspecto cognoscitivo se han realizado con estudiantes que se están preparando para ser maestros (Barb, 1997; Sloan, 1993).

Por otro lado, algunos autores indican que los manipulativos aumentan el nivel de entendimiento de los alumnos (Burns, 1996; Burton, 1992; Kennedy, 1986; Lapp, 1999; Moser, 1986; Tooke, 1992). Además, se han presentado resultados de investigaciones que comparan la instrucción utilizando material concreto con la instrucción tradicional, obteniendo resultados significativamente a favor de la primera (Chester, 1991; Ernest, 1994; Hinzman, 1997; Sherman, 1990; Sowell, 1989; Steele, 1993, 1994).

En particular, se han realizado investigaciones sobre el efecto del uso de material manipulativo en álgebra y se ha encontrado evidencia estadísticamente significativa a favor del uso de éstos (Goldsby, 1997; Leinebach y Raymond, 1996; Martelly, 1998; Sobol, 1998). Además, se han desarrollado proyectos fundamentados en el uso de manipulativos, los cuales han sido muy exitosos (Edwards, 1994; Ernest, 1994; Rodríguez, 1998).

En Puerto Rico se han realizado investigaciones relacionadas con el efecto del uso de material manipulativo en el aprovechamiento de los estudiantes en matemáticas. Algunas de éstas se llevaron a cabo en el nivel intermedio (Benítez Cotto, 1997; Colón Rodríguez, 2000; Martínez López, 1997; Matos Quintana, 1997; Rosa Carrasquillo, 1997; Santiago, 1997) y otras en el nivel superior (Bermúdez, 1997; Colón Soto, 1996; Rivera Orsini, 1996). En las mismas se encontró evidencia estadísticamente significativa a favor del uso de los manipulativos.

Este tipo de material ha sido mencionado por distintos autores como una alternativa mediante la cual los alumnos pueden construir representaciones de conceptos, es decir, realizar más fácilmente la transición de lo concreto a lo abstracto y por lo tanto recomiendan el uso de los mismos (Berman y Friederwitzer, 1989; Bohan y Shawaker, 1994; Hartshorn y Boren, 1990; Joyner, 1990; Land y Edwards, 1994; McClung, 1998; Sharp, 1995).

No obstante, aún con todas las investigaciones realizadas, las cuales se han fundamentado en los procesos de pensamiento de los alumnos y que cubren una variedad de aspectos, la literatura no abunda en estudios sobre los procesos de pensamiento de los estudiantes cuando éstos usan los manipulativos. En particular, algunos autores recomiendan que se realicen investigaciones sobre las dificultades cognoscitivas de los estudiantes (Alfred, 1999; Herscovics, 1989), los procesos de pensamiento utilizados por los alumnos del nivel intermedio cuando aprenden álgebra usando manipulativos (Sobol, 1998). Por lo tanto, es necesario que se desarrollen estudios sobre este aspecto, en particular utilizando técnicas y diseños cualitativos (Sobol, 1998).

El propósito de esta investigación fue describir y analizar los procesos de pensamiento de estudiantes al utilizar manipulativos en su aprendizaje de álgebra elemental. En particular, se analizó cómo les ayudaron los manipulativos Algeblocks y la Politabla Dreyfous a entender los conceptos estudiados y a formar las representaciones mentales de los mismos. Además se estudiaron los obstáculos cognoscitivos al resolver ejercicios mediante el uso de los manipulativos y a los que se enfrentaron cuando los resolvieron de forma abstracta, y cómo utilizaron las estrategias para superar estos obstáculos, si es que incorporaron alguna.

En este estudio se contestaron las siguientes preguntas de investigación: (1) ¿Cómo los estudiantes resuelven ejercicios sobre factorización de polinomios, en el curso de álgebra elemental con los manipulativos Algeblocks y Politabla Dreyfous y cuál es su relación con la parte abstracta?, (2) ¿Cómo son las representaciones mentales que forman los alumnos de los conceptos estudiados en álgebra elemental, cuando resuelven ejercicios con los manipulativos Algeblocks y la Politabla Dreyfous?, (3) ¿Cómo son los obstáculos cognoscitivos que encuentran los estudiantes cuando resuelven ejercicios con los manipulativos Algeblocks y la Politabla Dreyfous y cómo son los que encuentran, cuando los resuelven de forma abstracta?, y (4) ¿Cómo los estudiantes utilizan las estrategias para superar estos obstáculos?

Método

Esta investigación fue de naturaleza descriptiva cualitativa y se llevó a cabo en el ambiente natural donde sucedieron los eventos específicamente, en un salón de clases del curso de Álgebra Elemental. Se utilizaron diferentes maneras de recopilar los datos y de esta forma se realizó el proceso de triangulación (Bogdan y Biklen, 1998; Creswell, 1994, 1998; Drew, Hardman, y Weaver Hart, 1996; Fontana y Frey, 2000; Foster, 1996; Gall, Gall, y Borg, 1999; Merriam, 1988, 1998; Patton, 1990; Stake, 2000; Vockell y Asher, 1995; Wiersma, 1995; Yin, 1993, 1994). Se utilizaron: (a) la prueba Longeot, (b) la técnica de entrevista, (c) la técnica de pensar en voz alta, (d) la técnica de exploración retrospectiva, (e) las observaciones directas y (f) los documentos escritos por los estudiantes. La mayoría de los datos se presentan en forma narrativa, esto es, usando palabras o diagramas, en lugar de números (Creswell, 1994; Fraenkel y Wallen, 1996; Merriam, 1988). Se dio énfasis tanto en el proceso de los estudiantes cuando aprendían álgebra elemental mediante manipulativos, como en el resultado obtenido por el uso de los mismos (Creswell, 1994; Fraenkel y Wallen, 1996; Merriam, 1988).

Diseño

El diseño que se utilizó en esta investigación fue un *estudio de caso múltiple* (Creswell, 1994; Merriam, 1998; Yin, 1993, 1994) en el cual participaron tres estudiantes de noveno grado matriculados en un curso de Álgebra Elemental. Se describieron y analizaron sus procesos de pensamiento al factorizar polinomios en el curso de Álgebra Elemental, mediante el uso de los manipulativos Algeblocks y la Politabla Dreyfous Específicamente, se describió y analizó esta situación en términos cualitativos durante doce semanas. Durante este tiempo, la investigadora observó el trabajo de los estudiantes en el curso de Álgebra Elemental y además, se realizaron cinco sesiones de reunión con cada estudiante individualmente donde les presentaron ejercicios para resolver con los manipulativos y sin el uso de éstos. Las primeras cuatro sesiones de reunión se llevaron a cabo previo a que el profesor explicara el método abstracto para factorizar polinomios. El propósito de esta acción fue investigar si los alumnos podían hacer la transición de lo concreto a lo abstracto en relación con este tema.

Muestra

Para seleccionar a los participantes, se les administró la prueba Longeot a todos los estudiantes de noveno grado, quienes tomaban el curso de Álgebra Elemental en la escuela laboratorio de la Universidad de Puerto Rico, para determinar el nivel cognoscitivo en que se encontraban. Se clasificó a los estudiantes en el nivel de desarrollo cognoscitivo: concreto o formal. Luego, se utilizó el método de muestreo aleatorio simple para seleccionar a dos alumnos del nivel concreto y uno del nivel formal. Se realizó de esta manera, ya que los autores indican que los estudiantes que están en la etapa concreta necesitan más de la ayuda de los manipulativos para pasar por experiencias instruccionales mediante las cuales puedan visualizar y entender mejor los conceptos que estudian (Phillips y Soltis, 1985; Piaget, 1964, 1972, 1973, 1977). Otros indican que la enseñanza debe comenzar con la fase concreta hasta llegar a la abstracta, independientemente de la edad de los estudiantes (Boham y Shawaker, 1994; Brown y Smith, 1997; Greenes, 1995; Hartshorn y Boren, 1990; Lapp, 1999; Moser, 1986). No obstante, algunos señalan que aún los adultos necesitan de material concreto para entender mejor los conceptos (Berman y Friederwitzer, 1989).

Las dos alumnas seleccionadas del nivel concreto eran del sexo femenino, las cuales se identificaron como estudiante **A** y estudiante **B**, mientras que el joven seleccionado del nivel formal, era un varón, el cual se identificó como estudiante **C**.

Análisis de los datos

Se realizó un análisis de contenido (Merriam, 1998; Patton, 1990), tanto de las cinco sesiones de reunión que se llevaron a cabo, como de las observaciones diarias en la clase de álgebra elemental y de los documentos escritos por los estudiantes en estas sesiones. El análisis de contenido se define como el proceso de identificar, codificar y crear categorías para los patrones observados en los datos (Merriam, 1998; Patton, 1990). Este análisis se fundamentó en la identificación de los aspectos de interés de este estudio (Patton, 1990). Se recomienda que se desarrollen categorías y que se realicen comparaciones y contrastes para obtener el mejor significado posible de los eventos, esto es, el investigador debe contemplar la posibilidad de enfrentarse con hallazgos contradictorios (Creswell, 1994; Merriam, 1998). Se recomienda, también, que se establezca un proceso de codificación para reducir la información, de manera que se pueda clasificar la misma en las categorías que se establezcan (Creswell, 1994; Merriam, 1998). La investigadora realizó este proceso. A continuación se presenta un resumen de los hallazgos obtenidos en esta investigación. Se han incluido los aspectos sobresalientes de ésta.

Hallazgos

Proceso al resolver ejercicios y su relación con la forma abstracta

Se encontró que el proceso que seguían los estudiantes para factorizar polinomios, usando los manipulativos era el siguiente: seleccionar las piezas de los Algeblocks que necesitaban las cuales representaban los términos del ejercicio, colocarlas en la Politabla tratando de formar un rectángulo y ubicar las liguillas correspondientes, de manera que se respetaran los signos de los términos del polinomio. Observaban los bordes de la Politabla para determinar la respuesta que le brindaba la representación que habían hecho. Se encontró también que los tres estudiantes pudieron representar algunos de los ejercicios presentados, de más de una forma y todos indicaban que se obtenía la misma respuesta. Más aún, la estudiante B y el estudiante C señalaron que en lo único que variaban, era en el orden, pero que esto no afectaba el resultado, lo que indica que conocían lo que dice la propiedad conmutativa de la multiplicación.

En particular, la estudiante A demostró, tanto en sus ejecutorias en todas las sesiones de reunión, como por las observaciones recopiladas por la investigadora en el salón de clases, que no había podido realizar la transición de lo concreto a lo abstracto para llevar a cabo el proceso de factorización de polinomios. Esto se sustenta porque pudo factorizar correctamente los ejercicios propuestos, usando los manipulativos, pero no logró hacer este proceso con los polinomios que se le presentaron para factorizar algebraicamente. No mostraba persistencia para tratar de realizar la factorización algebraica de los polinomios propuestos, sino que de inmediato se daba por vencida, sin intentarlo. Además, conceptualizaba la factorización de polinomios en dos vertientes, una usando los manipulativos y la otra, usando el método algebraico, sin relación alguna entre ellos.

Por su parte, la estudiante B pudo factorizar correctamente los ejercicios presentados en las sesiones de reunión dos y tres, en los cuales podía usar los manipulativos, pero no pudo factorizar algebraicamente los que se le presentaron con ese propósito. Este aspecto indica que no había podido realizar la transición de lo concreto a lo abstracto en relación conlos métodos: factor común, diferencia de dos cuadrados y trinomio cuadrado perfecto. Mientras que en la cuarta sesión de reunión, la estudiante pudo factorizar correctamente todos los ejercicios presentados y mostró que había comenzado hacer la transición de lo concreto a lo abstracto en relación conla factorización de trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$, y $ax^2 + bx + c$. En esta sesión de reunión utilizó, por primera vez, el proceso de verificación para cotejar que las respuestas obtenidas fuesen correctas.

El estudiante C mostró que pudo realizar la transición de lo concreto a lo abstracto con relación al tema de factorización de polinomios, desde la segunda sesión de reunión en la cual se trabajó con el método de factor común. Es decir, factorizó correctamente todos los ejercicios propuestos, valiéndose de los manipulativos, así como de forma algebraica. Además, realizó correctamente el proceso de verificación para todos los ejercicios, usando la propiedad distributiva. De los hallazgos obtenidos en esta investigación, se desprende que el uso de los manipulativos va más allá de la etapa de desarrollo cognoscitivo en que se encuentre una persona, es decir, los mismos mostraron que ayudaban en el proceso de aprendizaje, tanto para los estudiantes que estaban en el nivel de desarrollo cognoscitivo concreto, como para aquellos que se encontraban en el nivel formal. Más aún, aunque el estudiante C, quien estaba en el nivel de desarrollo cognoscitivo formal, según los resultados de la prueba Longeot, se mostró reacio a utilizar los manipulativos al comienzo de este estudio, luego indicó que le resultaba más fácil factorizar los polinomios con el uso de éstos y que le ayudaban a entender mejor los procesos que realizaba.

En resumen, a pesar de que los tres participantes de esta investigación seguían un proceso similar para factorizar polinomios, usando los manipulativos Algeblocks y la Politabla Dreyfous, el estudiante C fue el único que demostró que había hecho la transición de lo concreto a lo abstracto para la mayor parte de los métodos de factorización estudiados. Esto era de esperarse, ya que el mismo se encontraba en el nivel de desarrollo cognoscitivo formal, según los resultados obtenidos en la prueba Longeot y por lo tanto, el poder pasar de lo concreto, con el uso de manipulativos, a lo abstracto, usando el método algebraico, era más fácil para él. Por su parte, de las dos alumnas que estaban en el nivel de desarrollo cognoscitivo concreto, según los resultados obtenidos en la prueba Longeot, solamente la estudiante B demostró que había hecho la transición de lo concreto a lo abstracto, y fue sólo para la factorización de trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$ y de la forma: $ax^2 + bx + c$. Mientras que la estudiante A no demostró haber realizado esta transición para ninguno de los métodos de factorización estudiados. Esto se evidenció porque no pudo factorizar algebraicamente ninguno de los ejercicios presentados con este propósito.

Representación mental

La representación mental que formaron los tres estudiantes participantes de la investigación cuando factorizaban ejercicios, usando los manipulativos Algeblocks y la Politabla Dreyfous fue precisamente las piezas de los Algeblocks y su correspondiente localización en la Politabla de manera que se formara un rectángulo. En particular, mencionaron que también pensaban en la forma en que debían colocar las liguillas, de modo que se respetaran los signos de los términos del polinomio que estaban factorizando.

En particular, la estudiante A y la estudiante B señalaron que ya tenían en su mente la imagen de ésta y que localizaban mentalmente los ejercicios en la misma. El estudiante C señaló que después de usar muchas veces la Politabla, ya tenía como "retratado en su mente" la imagen de este manipulativo. La estudiante B y el estudiante C mencionaron que también pensaban en la forma en que debía colocar las liguillas, de modo que se respetaran los signos de los términos del polinomio. Además, tanto la estudiante A como la estudiante B indicaron que preferían usar los manipulativos para realizar la factorización de los ejercicios, y no hacerlo de forma abstracta.

Obstáculos cognoscitivos

En relación con los obstáculos cognoscitivos presentados por los participantes de la investigación, se encontró que la estudiante A y la estudiante B mostraron los siguientes: en diversas ocasiones no utilizaron el proceso de verificación para cotejar que las respuestas obtenidas fuesen correctas, no pudieron hacer la representación de algunos de los ejercicios propuestos y tuvieron dificultad en identificar varias de las piezas de los Algeblocks que necesitaban para hacer la representación de algunos ejercicios. Además, mostraron que no sabían que los cuadrados son un tipo de rectángulo y la estudiante B no pudo factorizar algebraicamente los polinomios en los cuales había que utilizar los métodos: factor común, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto y agrupar términos, mientras que la estudiante A no pudo factorizar algebraicamente ninguno de los polinomios que se le presentó. Esto implica que no había podido realizar la transición de lo concreto a lo abstracto para factorizar polinomios con los métodos estudiados. Tampoco, pudieron crear un ejemplo que factorizara con el método de diferencia de dos cuadrados y no reconocieron que el uno era un cuadrado perfecto. Además, en ocasiones mostraron dificultad para acomodar las liguillas en la Politabla, de manera que se respetaran los signos de los términos del polinomio. Otro obstáculo cognoscitivo que mostraron fue que no supieron explicar lo que era factorizar polinomios, ni explicar la razón de por qué uno estaba factorizado y otro no. Además, no supieron identificar el método de factorización que se utilizaba para algunos ejercicios. Además, la estudiante A demostró que no sabía lo que eran términos semejantes, al escribir $3x + 6 = 9x$, y demostró también que presentaba dificultades con las leyes de exponentes, cuando indicó que: $5x^2 = (5x)^2$, luego señaló que $5x^2 = 10x$, lo cual está incorrecto.

Por su parte, el estudiante C mostró los siguientes obstáculos cognoscitivos: tuvo dificultad en identificar una de las piezas de los Algeblocks la cual necesitaba para representar un ejercicio en la Politabla, no supo explicar apropiadamente por qué un polinomio no estaba factorizado y realizó de forma incorrecta la representación de algunos ejercicios en la Politabla, lo que lo llevó a que la factorización obtenida fuese incorrecta.

Además, la mayoría de los obstáculos cognoscitivos que presentó este estudiante estaban relacionados con la factorización de los ejercicios algebraicamente. Posiblemente fue así, ya que fue el único que pudo hacer la transición de lo concreto a lo abstracto para la mayoría de los métodos de factorización estudiados y por lo tanto, el que utilizó con mayor frecuencia el proceso algebraico para factorizar los polinomios.

Estrategias para superar los obstáculos

En relación con las estrategias presentadas por los estudiantes para superar los obstáculos cognoscitivos a los que se enfrentaron, se encontró que la estudiante A apenas utilizó las mismas. En términos generales, cuando indicó incorrectamente las respuestas obtenidas en la Politabla, volvió a examinar con detenimiento las representaciones que había hecho y entonces, corrigió su error. De igual forma, cuando tuvo dificultad en identificar los términos semejantes en una expresión algebraica, analizó con detenimiento el ejercicio que había resuelto y pudo enmendar el error cometido. Esto es, incorporó la estrategia de revisar. Además, cuando no podía formar el rectángulo que buscaba en la Politabla, continuaba moviendo las piezas de los Algeblocks hasta que conseguía formar éste, es decir, incorporó la estrategia de tanteo y error. Mientras que en la clase de álgebra elemental, las estrategias que utilizó también fueron pocas. En algunos casos esperaba a que el profesor explicara y mostrara cómo se factorizaban los ejercicios, para superar los obstáculos cognoscitivos a los que se enfrentó, es decir, incorporaba la estrategia de observación. Además, cuando estaban factorizando algebraicamente los polinomios, ésta acudió a los que había factorizado con los manipulativos, para tenerlos como referencia. Esto implica que utilizó nuevamente la estrategia de revisar.

Por su parte, para corroborar que las respuestas obtenidas con los manipulativos estuviesen correctas, la estudiante B cotejaba que los ejercicios estuvieran bien representados en la Politabla, en lugar de usar el proceso de verificación, lo incorporó en la cuarta y quinta sesión de reunión. Además, para factorizar algebraicamente los polinomios con el método de factor común, la estrategia que utilizó esta alumna fue descomponer en factores cada término de éste, pero no lo hizo correctamente y no llegó a la respuesta correcta. Es decir, incorporó la estrategia de analizar, aunque la misma no la ayudó a llegar a la respuesta correcta. Mientras que la estrategia que usó para corregir las representaciones que había realizado incorrectamente, fue analizarlas con detenimiento y de esta manera se percató del error que había cometido y lo pudo corregir. Esto lo hizo en varias ocasiones, lo que implica que acudió nuevamente a la estrategia de revisar. Finalmente, la estrategia que utilizó esta estudiante para factorizar algebraicamente los trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$ y de la forma: $ax^2 + bx + c$, fue utilizar como guía los trinomios de este tipo que había podido factorizar, usando los manipulativos. Esto implica que intentó transferir lo que había hecho con los manipulativos, a los ejercicios que se le solicitaba que factorizara algebraicamente.

Por último, el estudiante C acudió en repetidas ocasiones al proceso de verificación con la propiedad distributiva, para cotejar que la respuesta obtenida fuese correcta. También incorporó la técnica de tanteo y error, para conseguir la respuesta de otros ejercicios. Además, utilizó una estrategia que usó la estudiante B, la cual consistió en utilizar como guía los ejercicios resueltos con los manipulativos, para poder factorizar algebraicamente los que se le presentaron con ese propósito, los cuales eran trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$ y de la forma: $ax^2 + bx + c$. Es decir, al igual que la estudiante B, también, intentó transferir lo que había hecho con los manipulativos, a los ejercicios que se le solicitaba que factorizara algebraicamente. Además, para superar algunos obstáculos cognoscitivos presentados, la estrategia que incorporó fue analizar con detenimiento el proceso que había realizado, reflexionar sobre el mismo y de esta forma llegó a la respuesta correcta. Esto es, utilizó la estrategia de revisar. Cuando el estudiante no pudo factorizar algebraicamente algunos de los ejercicios presentados en la quinta sesión de reunión, acudió a los manipulativos y de esta forma consiguió la respuesta que buscaba. Nuevamente utilizó la estrategia de "transferir". También incorporó la estrategia de explorar, para superar el obstáculo cognoscitivo al que se enfrentó cuando no pudo representar uno de los ejercicios propuestos. Finalmente, el estudiante C apenas presentó obstáculos cognoscitivos en la clase de álgebra elemental. Los que presentó estaban relacionados con representaciones incorrectas de los Algeblocks en la Politabla, pero pudo corregirlos todos y llegar a la respuesta correcta en cada caso. A continuación se presenta la discusión de los resultados y las conclusiones a las que se llegó en este estudio.

Discusión de hallazgos y conclusiones

En relación con el uso de manipulativos como una herramienta que ayuda a realizar la transición de lo concreto a lo abstracto, algunos autores indican que el uso de éstos facilita esta transición (Berman y Friederwitzer, 1989; Bohan y Shawaker, 1994; Hartshorn y Boren, 1990; Joyner, 1990; Moser, 1986). No obstante, los hallazgos de esta investigación indican que la estudiante A no pudo realizar la misma para el tema de factorización de polinomios, mientras que la estudiante B la pudo hacer sólo para un tipo de factorización, y el estudiante C la realizó para la mayoría de los métodos de factorización estudiados. La teoría de Piaget puede explicar lo que le sucedió a la estudiante A con respecto a esta situación. Como esta alumna se encontraba en el nivel de desarrollo cognoscitivo concreto, necesitaba de material manipulativo en el cual utilizara sus sentidos y tuviera diversas experiencias con éstos, para poder entender los conceptos que estudiaba (Piaget, 1964). Además, Piaget indica en su teoría de desarrollo cognoscitivo, que no todas las personas pasan de una etapa de desarrollo a la otra a la misma vez, que algunas necesitan tener más experiencias con material concreto antes de llegar a la etapa formal del pensamiento, en la cual son capaces de razonar en forma abstracta y sobre conceptos hipotéticos (Inhelder y Piaget, 1955; Piaget, 1964). Es probable que la estudiante A necesitara pasar por más experiencias con material manipulativo, de manera que pudiese realizar la transición de lo concreto a lo abstracto, en el tema de factorización de polinomios.

De igual forma, la teoría de Piaget puede explicar el hecho de que la estudiante B sólo pudo realizar la transición de lo concreto a lo abstracto para factorizar los trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$. Es decir, este hallazgo está de acuerdo con la teoría cognoscitiva de Piaget en el sentido de que una persona puede trabajar con conceptos hipotéticos en unas áreas de contenido, pero tarda más en otras para alcanzar cierto nivel de abstracción. Es decir, en unas áreas puede pasar más rápidamente de la etapa concreta a la etapa formal del desarrollo cognoscitivo. Este comportamiento lo demostró la estudiante B cuando pudo lograr la abstracción para factorizar trinomios de la forma mencionada anteriormente, pero no pudo hacerlo para los otros métodos de factorización estudiados.

Además, el hallazgo encontrado para el estudiante C, en el sentido de que pudo realizar la transición de lo concreto a lo abstracto con respecto al tema de factorización de polinomios, es cónsono con lo establecido en la teoría cognoscitiva de Piaget, ya que este alumno se encontraba en la etapa de desarrollo formal, según los resultados obtenidos en la prueba Longeot y por lo tanto, se justifica que haya podido hacer la transición de lo concreto a lo abstracto de forma más rápida que las estudiantes que estaban en el nivel de desarrollo cognoscitivo concreto. Esta teoría establece que las personas que se encuentran en la etapa formal pueden manejar más fácilmente los aspectos abstractos y trabajar con situaciones hipotéticas, ya que el pensamiento matemático formal es esencialmente hipotético - deductivo (Inhelder y Piaget, 1955; Piaget, 1964). Este planteamiento converge con los hallazgos encontrados para el estudiante C.

También, el hallazgo encontrado para la estudiante A y para la estudiante B, en el sentido de que visualizaban la factorización de polinomios en dos vertientes, una usando los manipulativos, y la otra, utilizando el método algebraico, es cónsono con lo señalado por Bright (1986). Este autor indica que si los manipulativos no se usan adecuadamente, puede llevar a la concepción errónea de que existen "dos mundos matemáticos", el de los símbolos y el de los manipulativos, y que ambos tienen reglas distintas. Indica que esta percepción puede producir conflictos en el desarrollo conceptual de los alumnos, que fue lo que se encontró para estas dos estudiantes. Es decir, el no poder establecer la conexión entre los manipulativos y el método algebraico para factorizar polinomios, les llevó a que no pudieran realizar la transición entre la fase concreta y la abstracta, en relación con este tema. En relación con esto, es probable que tanto la estudiante A como la estudiante B necesitaran diagramas de los manipulativos, como una ayuda para poder "conectar" la fase concreta con la fase abstracta, aspecto recomendado por Hynes (1986). Otros autores (Heddens, 1986; Martelly, 1998) están de acuerdo con este particular, ya que indican que es necesario ayudar a los estudiantes a conectar lo aprendido en el nivel concreto, con el nivel abstracto, de modo que se elimine el "hueco o vacío" que existe entre ambos. Estos autores destacan el hecho de que los alumnos deben internalizar el material nuevo en el nivel concreto, y sistemáticamente ir progresando hasta llegar a la representación abstracta del mismo.

Algunos autores (Baroody, 1989; Berman y Friederwitzer, 1989) también apoyan este aspecto, indicando que las representaciones pictóricas, como por ejemplo, diagramas de manipulativos, son importantes para conectar el vacío que existe entre la fase concreta y la abstracta. Howen (1986) también está de acuerdo con este particular, señalando que "la construcción del puente" entre los niveles concreto y abstracto, requiere una atención cuidadosa, esto es, aunque un estudiante pueda resolver un problema en el nivel concreto, no implica que sea capaz de resolverlo en el nivel abstracto. Esta situación se dio con la estudiante A y la estudiante B, éstas pudieron factorizar unos polinomios usando los manipulativos, pero no pudieron hacerlo algebraicamente.

Además, de los hallazgos encontrados para el estudiante C, se infiere que el uso de manipulativos le ayudó a desarrollar el simbolismo matemático que necesitaba para llevar a cabo el proceso de factorización de polinomios. Este aspecto apoya lo planteado por Capps y Pickreign (1993) en el sentido de que el uso frecuente de manipulativos puede ayudar a desarrollar el lenguaje y el simbolismo matemático. Lo anterior evidencia el hecho de que los manipulativos son útiles tanto para los estudiantes que están en el nivel de desarrollo cognoscitivo concreto, como para aquéllos que están en el nivel formal. Sobre este particular, algunos autores (Boham y Shawaker, 1994; Bright, 1986; Brown y Smith, 1997; Greenes, 1995; Hartshorn y Boren, 1990; Heddens, 1986; Howen 1986; Hynes 1986; Lapp, 1999; Moser, 1986) indican que la enseñanza debe comenzar con la fase concreta hasta llegar a la abstracta, independientemente de la edad de los estudiantes. Más aún, algunos señalan que también los adultos necesitan de material concreto para entender mejor los conceptos (Berman y Friederwitzer, 1989). A pesar de que el estudiante C se mostró "reacio" a usar los manipulativos al comienzo de esta investigación, luego señaló que el utilizar éstos le facilitaba los procesos y le ayudaban a entender mejor los conceptos estudiados.

También, este estudiante se mostró "persistente", es decir, establecía conjeturas y dedicaba el tiempo que fuese necesario para tratar de factorizar los polinomios, lo que trajo como consecuencia que, en muchas ocasiones, lograra su objetivo. Este aspecto del proceso de aprendizaje apoya lo señalado por varios investigadores (Lester, Garofalo, y Kroll, 1989; Nickerson, Perkins, y Smith, 1990; Schoenfeld, 1985, 1987) en el sentido de que los solucionadores de problemas que son exitosos son aquéllos que evalúan sus acciones y procesos de pensamiento, mientras realizan esta tarea. También, señalan que estos estudiantes dedican más tiempo a analizar el problema y las direcciones que deben tomar para solucionar el mismo, que los solucionadores menos exitosos. Es probable que estas acciones realizadas por el estudiante C influyeran en el éxito que demostró para resolver los ejercicios propuestos.

Por otra parte, la representación mental que formaron los tres estudiantes participantes del estudio cuando factorizaban polinomios, usando los manipulativos, fue precisamente las piezas de los Algeblocks y su correspondiente localización en la Politabla, de manera que se formara un rectángulo. También mencionaron que pensaban en la forma en que debían colocar las liguillas, de modo que se respetaran los signos de los términos del polinomio. Este hallazgo confirma lo establecido por Davis y Maher (1990) en el sentido de que el primer paso que se debe llevar a cabo cuando se soluciona un problema, es construir una representación del mismo. Indican además, que el material concreto puede ayudar a los estudiantes en el proceso de construir la representación adecuada de éstos. Este planteamiento está de acuerdo con lo expresado por otros autores (Martelly, 1998; Pogrow, 1994) en el sentido de que los manipulativos pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar modelos mentales de los conceptos. Además, Davis (1989) señala que las representaciones mentales que desarrollan los estudiantes, juegan un papel fundamental en su aprendizaje de álgebra. También, Berman y Friederwitzer (1989) señalan que el uso de modelos concretos ayuda a los estudiantes a desarrollar sus propias imágenes mentales de los conceptos. Es evidente que el usar los manipulativos Algeblocks y la Politabla, le ayudó a los estudiantes a construir la representación mental de los polinomios que factorizaban.

Además, de los hallazgos encontrados en esta investigación se desprende que los obstáculos cognoscitivos presentados por la estudiante A y la estudiante B eran similares, al igual que algunas de las estrategias utilizadas para superar éstos. Es posible que esto se deba a que ambas alumnas estaban en la etapa concreta de su desarrollo cognoscitivo, según los resultados obtenidos en la prueba Longeot, lo que trae como consecuencia que en algunos aspectos su proceso de pensamiento sea análogo. En particular, la estudiante A y el estudiante C presentaron obstáculos cognoscitivos cuando utilizaron incorrectamente las leyes de exponentes, aspecto que apoya lo señalado por Marquis (1988) en el sentido de que esa dificultad constituye uno de los errores más comunes que cometen los estudiantes en álgebra.

Por otra parte, tanto la estudiante A como la estudiante B presentaron un obstáculo cognoscitivo cuando realizaban la representación de polinomios que factorizaban con el método de trinomio cuadrado perfecto, ya que se les formaba un cuadrado en la Politabla y éstas no reconocían que los cuadrados son un tipo de rectángulo, lo que les trajo confusión. Este particular lo señala el NCTM en el documento *Principles and standards for school mathematics* (2000) en el que recomiendan que se deben trazar diagramas de Venn, para resumir las características sobre estas figuras geométricas, de manera que los estudiantes entiendan las mismas.

Por otro lado, es probable que el estudiante C fue el que más estrategias utilizó para superar los obstáculos cognoscitivos a los que se enfrentó, ya que el mismo mostró ser más persistente, hacía conjeturas y dedicaba el tiempo que fuese necesario para obtener las respuestas que buscaba. Posiblemente, este comportamiento le hizo reflexionar más y acudir a una mayor cantidad de estrategias para superar las dificultades que se encontró, mientras factorizaba los polinomios propuestos. Es decir, mostró en general, ser exitoso cuando realizaba esta tarea (Lester, Garofalo, y Kroll, 1989; Nickerson, Perkins, y Smith, 1990; Schoenfeld, 1985, 1987).

Asimismo, una de las teorías en la cual está fundamentada esta investigación, es la teoría constructivista. La misma plantea que el educando tome parte activa en la construcción de su propio conocimiento y que no sea un ente pasivo y ajeno a todo el proceso que le rodea. Es decir, que no esté sometido al mismo, sino que forme parte de éste (Anthony, 1996; Baroody y Ginsburg, 1990; Blais, 1988; Cobb, 1995; Davis, Maher, y Noddings, 1990; Gadanidis, 1994; Greenes, 1995; Greeno, Collins, y Resnick, 1996; Kerka, 1986, 1997; Peterson y Knapp, 1998; Tang y Ginsburg, 1999; Von Glasersfeld, 1990). La dinámica que se genera cuando se utilizan los manipulativos apropiadamente en el proceso de enseñanza – aprendizaje, está fundamentada en los postulados presentados por esta teoría. Esto es así, ya que los maestros deben permitir que sean los estudiantes los que construyan su propio conocimiento, a través del trabajo con este tipo de material. En particular, Peterson y Knapp (1998) señalan que esta teoría modifica el rol de los maestros, de unos que dirigen el discurso del salón de clases y que les indican los procesos correctos a los alumnos, a unos que guían las actividades de los estudiantes y que proveen ejemplos y contraejemplos. Brown y Smith (1997) también, indican que el uso apropiado de los manipulativos permite que sean los estudiantes los que descubran y lleguen a las conclusiones.

No obstante, en este estudio se encontró, que a pesar de la utilización de los manipulativos en el proceso de enseñanza – aprendizaje en la clase de álgebra elemental, no se proveyó de suficiente tiempo para que los estudiantes construyeran su propio conocimiento. Es decir, el profesor de la clase dirigía la misma y en muchas ocasiones presentaba las reglas que se pretendía que los alumnos descubrieran. En un sentido, esto trajo como consecuencia que la transición de lo concreto a lo abstracto se viera “como forzada”, ya que no todos los estudiantes llegaban a las generalizaciones deseadas. Este hallazgo coincide con lo encontrado por Sobol (1998) en su investigación, en el sentido de que los maestros que usaron manipulativos adoptaron nuevas estrategias, pero no modificaron el mecanismo fundamental de ser un “transmisor” del conocimiento.

Sin embargo, hay que tomar también en consideración que había un prontuario ya establecido en el curso de álgebra elemental, con unos temas que había que cubrir en cierto tiempo. Esto traía como consecuencia que no se dispusiera de suficiente tiempo, de modo que los alumnos pudieran permanecer por más un período más prolongado en algún tema que así lo requiriera. Además, existía otra limitación en la escuela, y era que frecuentemente había períodos cortos por diversas razones: reuniones, actividades y otros, además de que en ocasiones se suspendían las clases por las razones anteriores, lo que traía como consecuencia que se minimizara aún más el tiempo del cual se disponía para las mismas. Es posible que las causas mencionadas anteriormente sean las responsables de que no se proveyera del tiempo que necesitaban los estudiantes para construir su propio conocimiento, según lo establece la teoría constructivista.

Además, en relación con la quinta sesión de reunión, la cual se llevó a cabo cuando los estudiantes habían estudiado todos los métodos de factorización, usando tanto los manipulativos como algebraicamente, se esperaba que éstos pudieran factorizar una mayor cantidad de ejercicios, utilizando la forma algebraica. No obstante, no fue así. De hecho, el estudiante C señaló que usaba los manipulativos "porque era más fácil, estaba cansado y no tenía deseos de pensar ese día". Ya que este estudiante demostró que pudo realizar la transición de lo concreto a lo abstracto para la mayoría de los métodos de factorización estudiados, es posible que hubiese podido utilizar la forma algebraica para factorizar una mayor cantidad de ejercicios en esa sesión de reunión. No obstante, por los comentarios emitidos por éste, aparentemente no estaba en la disposición de hacerlo ese día.

Finalmente, los resultados obtenidos en esta investigación llevan a concluir que el uso de manipulativos en álgebra elemental puede promover en los estudiantes la capacidad de crear representaciones mentales de los conceptos que estudian. De esta manera, se provee para que éstos puedan solucionar problemas relacionados con el tema bajo estudio (Davis, 1989; Davis y Maher, 1990; Martelly, 1998; Pogrow, 1994). También, se concluye que el uso de material manipulativo resulta útil tanto para los estudiantes que están en el nivel de desarrollo cognoscitivo concreto, como para aquéllos que están en el nivel formal. Es decir, aunque éstos últimos puedan llegar a realizar las abstracciones que incluye la matemática, y sobre todo, el álgebra más rápidamente que los alumnos que están en la etapa concreta, los manipulativos le proveen una herramienta para entender mejor los conceptos estudiados y le facilitan lograr dichas abstracciones.

Además, se concluye que es importante proveer el tiempo que necesitan los estudiantes para construir su propio conocimiento, según lo establece la teoría constructivista. De esta forma se incrementa la probabilidad de que éstos puedan realizar la transición de lo concreto a lo abstracto, según sus capacidades y habilidades individuales, de forma que tenga sentido el conocimiento adquirido.

Referencias

Alfred, S. A. (1999). *An analysis of students' cognitive strategies employed in a learning experience from chaos theory* (Disertación doctoral, Rutgers The State University of New Jersey, 1999).

Anthony, G. (1996). Active learning in a constructivist framework. *Educational Studies in Mathematics, 31*, 349 – 369.

Barb, C. M. (1997). An investigation of the development of mathematical beliefs and problem – solving processes of preservice elementary teachers in a constructivist environment (Disertación doctoral, Kent State University, 1997). *Dissertation Abstract International, 58*, A03.

Baroody, A. J. (1989). Manipulatives don't come with guarantees. *Arithmetic Teacher, 37* (2), 4.

Baroody, A. J., y Ginsburg, H. P. (1990). Children's mathematical learning: A cognitive view. En R. B. Davis, C. A. Maher, y N. Noddings (Eds.), *Constructivist view on the teaching and learning of mathematics,* *Monograph No. 4 of the Journal for Research in Mathematics Education* (pp. 51 – 64). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Benítez Cotto, A. (1997). Investigando y aprendiendo con manipulativos. En Z. Orengo Rohena, y A. Aponte Moreno (Eds.), *Investigación en matemática educativa en Puerto Rico: Tres años del instituto de matemáticas* (pp. 303 – 307). San Juan, PR: UPR.

Berman, B., y Friederwitzer, F. (1989). Algebra can be elementary...when it's concrete. *Arithmetic Teacher, 36* (8), 21 – 24.

Bermúdez, N. M. (1997). Uso de manipulativos y tecnología para motivar a los estudiantes en geometría, disminuir el ausentismo y aumentar el aprovechamiento académico. En Z. Orengo Rohena, y A. Aponte Moreno (Eds.), *Investigación en matemática educativa en Puerto Rico: Tres años del instituto de matemáticas* (pp. 258 – 260). San Juan, PR: UPR.

Blais, D. M. (1988). Constructivism: A theoretical revolution for algebra. *Mathematics Teacher, 81,* 624 – 631.

Bogdan, R. C., y Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: An introduction to theory and methods.* Boston, MA: Allyn y Bacon.

Bohan, H. J., y Shawaker, P. B. (1994). Using manipulatives effectively: A drive down rounding road. *Arithmetic Teacher, 41,* 246 – 248.

Bright, G. W. (1986). Using manipulatives. *Arithmetic Teacher, 33* (6), 4.

Brown, C. A., y Smith, M. S. (1997). Supporting the development of mathematical pedagogy. *The Mathematics Teacher, 90,* 138 – 143.

Burns, M. (1996). How to make the most of math manipulatives. *Instructor, 105* (7), 45 – 51.

Burton, G. M. (1992). Young children's choices of manipulatives and strategies for solving whole number division problems. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 14* (2), 2 – 17.

Bush, J. A. (1998). *An exploratory study of two students' understanding of group theory concepts prerequisite to the concept of quotient group* (Disertación doctoral, University of Northern Colorado, 1998).

Capps, L. R., y Pickreign, J. (1993). Language connections in mathematics: A critical part of mathematics instruction. *Arithmetic Teacher, 41* (1), 8 – 12.

Chen, S. H. (1992). An examination of the relationship between achievement in solving process problems and cognitive levels of development in third – grade students (Tesis de maestría, San José State University, 1992). *Master Abstract International, 31,* 04.

Chester, J. (1991). *Math manipulatives uses and math achievement of third – grade students.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED339591).

Cobb, P. (1995). Cultural tools and mathematical learning: A case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 362 – 385.

Colón Rodríguez, M. (2000). *El efecto del uso de los manipulativos en el aprovechamiento de estudiantes del nivel intermedio en la solución de* *ecuaciones lineales en una variable.* Tesis de maestría no publicada, Universidad de Puerto Rico, Río Piedras, Puerto Rico.

Colón Soto, S. (1996). *Efectividad del uso del laboratorio con manipulativos para minimizar las destrezas rezagadas y actitudes.* Investigación no publicada, Universidad de Puerto Rico en Río Piedras.

Creswell, J. W. (1994). *Research design: Qualitative and quantitative approaches.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Creswell, J. W. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Davis, R. B. (1989). Research studies in how humans think about algebra. En S. Wagner, y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra: Vol. 4* (pp. 266 – 274). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics y Lawrence Erlbaum Associate.

Davis, R. B., y Maher, C. A. (1990). What do we do when we "do mathematics"? En R. B. Davis, C. A. Maher, y N. Noddings (Eds.), *Constructivist view on the teaching and learning of mathematics, Monograph No. 4 of the Journal for Research in Mathematics Education* (pp. 65 – 78). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, R. B., Maher, C. A., y Noddings, N. (1990). Suggestions for the improvement of mathematics education. En R. B. Davis, C. A. Maher, y N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics, Monograph No. 4 of the Journal for Research in Mathematics Education* (pp. 187 – 191). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Days, H. C., Wheatley, G. H., y Kulm, G. (1979). Problem structure, cognitive level, and problem – solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 10,* 135 – 146.

Drew, C. J., Hardman, M. L., y Weaver Hart, A. (1996). *Designing and conducting research: Inquiry in education and social science* (2nd ed.). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Edwards, T. G. (1994). *Current reform efforts in mathematics education.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED372969).

Ernest, P. S. (1994, noviembre). *Evaluation of the effectiveness and implementation of math manipulatives project.* Conferencia presentada en la convención anual de la Mid - South Educational Research Association, Nashville, TN.

Fontana, A., y Frey, J. H. (2000). Interview: From structured questions to negotiated text. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (2nd ed., pp. 645 – 672). Thousand Oaks, CA: Sage.

Foster, P. (1996). Observational researcher. En R. Sapsford y V. Jupp (Eds.), *Data collection and analysis.* (pp. 57 – 93). Thousand Oaks, CA: Sage.

Fraenkel, J. R., y Wallen, N. E. (1996). *How to design and evaluate research in education* (3rd ed.). New York: McGraw – Hill.

Gadanidis, G. (1994). Deconstructing constructivism. *Mathematics Teacher, 87*, 91 – 97.
Gall, J. P., Gall, M. D., y Borg, W. R. (1999). *Applying educational research: A practical guide* (4th ed.). New York: Longman.
Goldsby, D. S. (1997). The effect of algebra tile use on the polynomial factoring ability of algebra I students. (Disertación doctoral, University of New Orleans, 1997). *Dissertation Abstract International, 57*, A08.
Greenes, C. (1995). Mathematics learning and knowing: A cognitive process. *Journal of Education, 177* (1), 85 – 106.
Greeno, J. G., Collins, A. M., y Resnick, L. B. (1996). Cognition and learning. En D. C. Berliner, y R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp.15 – 46). New York: Macmillan.
Hartshorn, R., y Boren, S. (1990). *Experiential learning of mathematics: Using manipulatives.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED321967).
Heddens, J. W. (1986). Bridging the gap between the concrete and the abstract. *Arithmetic Teacher, 33* (6), 14 – 17.
Hercovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner, y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra: Vol. 4* (pp. 60 – 86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics y Lawrence Erlbaum Associate.
Hinzman, K. P. (1997). *Use of the manipulatives in mathematics at the middle school level and their effects on students' grades and attitudes.* Tesis de maestría no publicada, Universidad de Salem – Teikyo, West Virginia.
Howen, H. (1986). The role of manipulatives in learning mathematics. *Insights into Open Education, 19*, (1), 2 – 11.
Hsieh, D. A. (1995). *A comparison of the thinking processes of mathematically advanced and average students, age 10 to 11, engaged in mathematics problem – solving.* (Disertación doctoral, University of Northern Colorado, 1995). *Dissertation Abstract International, 57*, A02.
Hynes, M. C. (1986). Selection criteria. *Arithmetic Teacher, 33* (6), 11 – 13.
Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Buenos Aires: Paidós.
Joyner, J. M. (1990). Using manipulatives successfully. *Arithmetic Teacher, 38* (2), 6 – 7.
Kennedy, L. M. (1986). A rationale. *Arithmetic Teacher, 33* (6), 6 – 7, 32.
Kerka, S. (1986). *On second thought: Using new cognitive research in vocational education.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED272699).
Kerka, S. (1997). *Constructivism, workplace learning, and vocational education.* (ERIC Document Reproduction Service No. ED407573).
Land, W. A., y Edwards, K. (1994, noviembre). *Teaching mathematics to attention deficit disorder students.* Conferencia presentada en la convención anual de la Mid - South Educational Research Association, Nashville, TN.

Lapp, D. A. (1999). Multiple representation for pattern exploration with the graphing calculator and manipulatives. *The Mathematics Teacher, 92,* 109 – 113.

Leinebach, M., y Raymond, A. M. (1996, julio). *A two – year collaborative action research study on the effects of a "hands – on" approach to learning algebra.* Conferencia presentada en la convención anual de la North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Panama City, FL.

Lester, F. K., Garofalo, J., y Kroll, D. (1989). The *role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes.* A Final report of the Mathematics Education Development Center, Indiana University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED314255).

Marquis, J. (1988). Common mistakes in algebra. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K–12, 1988 Yearbook* (pp.204 – 205). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Martelly, D. I. (1998). *Effects of using manipulative materials to teach remedial algebra to community college students on achievement and attitudes toward mathematics* (Disertación doctoral, Florida International University, 1998).

Martínez López, M. (1997). El impacto de los manipulativos y la tecnología en la enseñanza del álgebra. En Z. Orengo Rohena, y A. Aponte Moreno (Eds.), *Investigación en matemática educativa en Puerto Rico: Tres años del instituto de matemáticas* (pp. 308 – 311). San Juan, PR: UPR.

Matos Quintana, E. I. (1997). La efectividad del uso de manipulativos, tecnología y aprendizaje cooperativo en el álgebra. En Z. Orengo Rohena, y A. Aponte Moreno (Eds.), *Investigación en matemática educativa en Puerto Rico: Tres años del instituto de matemáticas* (pp. 261 – 279). San Juan, PR: UPR.

McClung, L. W. (1998). *A study on the use of manipulatives and their effect on student achievement in a high school algebra I class.* Tesis de maestría no publicada, Universidad de Salem – Teikyo, West Virginia.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* San Francisco, CA: Jossey – Bass.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education.* San Francisco, CA: Jossey – Bass.

Mertz, D. L. (1990). *Cognitive analysis of individual differences in arithmetic performance by postsecondary students* (Disertación doctoral, University of California Santa Barbara, 1990). *Dissertation Abstract International, 51,* A12.

Moser, J. M. (1986). Curricular issues. *Arithmetic Teacher, 33* (6), 8 - 10.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Nickerson, R. S., Perkins, D. N., y Smith, E. E. (1990). *Enseñar a pensar: Aspectos de la aptitud intelectual* (2nd ed.). Barcelona, España: Paidós.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2nd ed.). Beverly Hills, CA: Sage.

Peterson, P. L., y Knapp, N. F. (1998). Inventing and reinventing ideas: Constructivist teaching and learning mathematics. En G. Cawelti (Ed.), *Challenges and achievements of american education. The 1998 ASCD yearbook* (pp. 134 – 157). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Phillips, D. C., y Soltis, J. F. (1985). *Perspectives on learning.* New York: Teachers College.

Piaget, J. (1964). Development and learning. En R. E. Ripple, y V. N. Rockcastle (Eds.), *Piaget rediscovered* (pp. 25 – 33). Ithaca, NY: Cornell University.

Piaget, J. (1972). Psychology and epistemology: Towards a theory of knowledge. Harmonsworth, England: Penguin Books.

Piaget, J. (1973). To understand is to invent. New York: Grossman.

Piaget, J. (1977). The role of action in the development of thinking. En W. F. Overton, y J. McCarthy Gallagher (Eds.), *Knowledge and development: Advances in research and theory* (pp. 17 – 42). New York: Plenum.

Pogrow, S. (1994). Helping students who "just don't understand". *Educational Leadership, 52* (3), 62 – 66.

Rivera Orsini, Y. (1996). *Efectividad del uso de los manipulativos en álgebra elemental para estudiantes con rezago académico.* Investigación no publicada, Universidad de Puerto Rico en Río Piedras.

Roberts, V. A. (1990). *Relationships among processing behavior mode, cognitive development level and mathematics achievement in black metropolitan high school students* (Disertación doctoral, Howard University, 1990). *Dissertation Abstract International, 51,* B10.

Rodríguez, J. (1998). Informe final del Proyecto Manipulativos y Tecnología para un Aprendizaje Activo (Ma Te A^2). San Juan, PR: Author.

Rosa Carrasquillo, C. L. (1997). La efectividad del uso de manipulativos, la computadora y el aprendizaje cooperativo en el aprovechamiento académico e interés del estudiante en la unidad de fracciones. En Z. Orengo Rohena, y A. Aponte Moreno (Eds.), *Investigación en matemática educativa en Puerto Rico: Tres años del instituto de matemáticas* (pp. 295 – 302). San Juan, PR: UPR.

Santiago, I. I. (1997). Uso de manipulativos en el desarrollo de conceptos de álgebra. En Z. Orengo Rohena, y A. Aponte Moreno (Eds.), *Investigación en matemática educativa en Puerto Rico: Tres años del instituto de matemáticas* (pp. 63 – 70). San Juan, PR: UPR.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, Fl: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). Cognitive science and mathematics education: An overview. En A. H. Schoenfeld (Eds.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 1 – 31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sharp, J. M. (1995, octubre). *Results of using algebra tiles as meaningful representation of algebra concepts.* Conferencia presentada en la convención anual de Mid – Western Educational Research Association, Chicago, IL.

Sherman, H. W. (1990). A comparison of three methods of teaching rational number concepts to preservice teachers. *Educational Research Quarterly, 14* (4), 48 – 55.

Sloan, S. C. (1993). The effect of cognitive processes on the learning of mathematics by pre – service elementary teachers (Disertación doctoral, University of Minnesota, 1993). *Dissertation Abstract International, 54,* A05.

Sobol A. J. (1998). *A formative and summative evaluation study classroom interactions and student/teacher effects when implementing algebra tile manipulatives with junior high school.* (Disertación doctoral, St. John's University, 1998).

Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulatives materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 498 – 505.

Stake, R. E. (2000). Case studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (2nd ed., pp. 435 – 454). Thousand Oaks, CA: Sage.

Steele, D. F. (1993, abril). *What mathematics students can teach us about educational engagement: Lessons from the middle school.* Conferencia presentada en la convención anual de la American Educational Research Association, Atlanta, GA.

Steele, D. F. (1994, abril). *Helping preservice teachers confront their conceptions about mathematics and mathematics teaching and learning.* Conferencia presentada en la convención anual de la American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Tang, E. P., y Ginsburg, H. P. (1999). Young children's mathematical reasoning: A psychological view. En L V. Stiff, y F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades k – 12: 1999 Yearbook* (pp. 45 – 61). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, G. J. (1986). *An investigation of thought processes used by community college students solving verbal algebra problems* (Disertación doctoral, Northern Arizona University, 1986).

Tooke, D. J. (1992). Why aren't manipulatives used in every middle school mathematics classroom? *Middle School Journal, 24* (2), 61 – 62.

Tsao, P D. (1995). Conceptual development for learning to solve linear equations in one variable (Disertación doctoral, University of Georgia, 1995). *Dissertation Abstract International, 56,* A10.

Vockell, E. L., Asher, J. W. (1995). *Educational research* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Merril

Von Glasersfeld, E. (1990). An exposition of constructivism: Why some like it radical. En R. B. Davis, C. A. Maher, y N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (pp. 19 – 29). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Webb, N. L. (1979). Processes, conceptual knowledge, and mathematical problem – solving ability. *Journal for Research in Mathematics Education, 10,* 83 – 93.
Wiersma, W. (1995). *Research methods in education: An introduction* (6th ed.). Boston, MA: Allyn and Bacon.
Yin, R. K. (1993). *Applications of case study research: Design and methods.* Newbury Park, CA: Sage.
Yin, R. K. (1994). *Case study research* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Notas

Datos descriptivos de los manipulativos Algeblocks y la Politabla Dreyfous

Los manipulativos que se utilizaron en esta investigación fueron los **Algeblocks** y la **Politabla Dreyfous**, los cuales son marcas registradas. Éstos fueron creados por el Dr. Ricardo Dreyfous en el año 1993. Los primeros contienen siete piezas distintas, éstas son: (a) las unidades: los bloques cuadrados más pequeños, (b) las piezas que representan la x: los bloques rectangulares que miden una unidad de ancho por x unidades de largo, por lo tanto, su área es $1 \times x = x$, (c) las piezas que representan la y: los bloques rectangulares más largos que los que representan la x, cuyas dimensiones son una unidad de ancho por y unidades de largo, por lo tanto, su área es $1 \times y = y$, (d) las piezas que representan la z: bloques rectangulares un poco más largos que los que representan la y, cuyas dimensiones son una unidad de ancho por z unidades de largo, por lo tanto, su área es $1 \times z = z$, (e) las piezas que representan xy: bloques rectangulares cuyas dimensiones son x unidades de ancho por y unidades de largo, por lo tanto, su área es $x \times y = xy$, (f) las piezas que representan x^2: bloques cuadrados de dimensiones x unidades de largo por x unidades de ancho, por lo tanto, su área es x^2 y (g) las piezas que representan y^2: bloques cuadrados más grandes que los que representan x^2, cuyas dimensiones son y unidades de ancho por y unidades de largo, por lo tanto, su área es y^2. Todas estas piezas son de color azul claro por un lado, las cuales representan las cantidades positivas, y de color azul oscuro por el otro, las cuales representan las cantidades negativas. También, la parte azul oscura tiene textura arrugada. Además, los manipulativos incluyen dos símbolos de "es igual" (=) y una pieza que por un lado contiene el símbolo de relación "es mayor que" (>) y al voltearlo tiene el símbolo "es menor que" (<). Todas las piezas anteriores vienen organizadas en una cajita plástica que contiene ocho divisiones, en cada una de éstas se colocan las ocho piezas del manipulativo. En particular, en cada caja vienen 30 unidades, 12 piezas de la x, 10 piezas de la y, seis piezas de la z, ocho piezas x^2, seis piezas y^2, seis piezas xy.

Los **Algeblocks** son unos manipulativos muy versátiles, que los pueden utilizar los estudiantes desde el nivel elemental, hasta el universitario, ya que con éstos, los alumnos pueden aprender gran una variedad de conceptos. Algunos de los conceptos que se pueden aprender con este material son los siguientes: suma, resta, multiplicación y división de números enteros, leyes de signos para las cuatro operaciones básicas, suma y resta de términos semejantes, el proceso de sustitución de variables por números enteros, traducción de expresiones lingüísticas y enunciados lingüísticos a expresiones algebraicas, multiplicación y división de polinomios, productos especiales, factorización de polinomios, solución de ecuaciones lineales en una variable, solución de inecuaciones lineales en una variable, solución de ecuaciones con valor absoluto, solución de sistemas de ecuaciones lineales en dos variables por el método de eliminación y de sustitución, y solución de sistemas de ecuaciones lineales en tres variables. En la Figura 1 se muestran todas las piezas que incluye el manipulativo **Algeblocks**.

Por otro lado, la **Politabla Dreyfous**, es un cuadrado plástico de dimensiones de nueve pulgadas por nueve pulgadas. Ésta tiene la representación de tres longitudes distintas, tanto en el lado vertical como en el horizontal. La primera, la longitud menor, representa la unidad. La segunda longitud representa la x y la tercera longitud, representa la y. La **Politabla Dreyfous** es completamente compatible con los **Algeblocks**, esto es, las piezas de este último se pueden colocar sobre la **Politabla**, en los espacios cuyas dimensiones correspondan a las de las piezas. Por ejemplo, en la primera fila se pueden colocar cuatro piezas que representan la unidad, tres piezas que representan la x y dos piezas que representan la y. Otro ejemplo, que representa esta correspondencia, es el siguiente: en la última fila se pueden colocar cuatro piezas que representan la y, tres piezas que representan la xy, y dos piezas que representan y^2. La **Politabla Dreyfous** incluye diez liguillas, seis azul claro y cuatro negras. Las liguillas de color azul claro se utilizan para representar las expresiones positivas, mientras que las liguillas negras se usan para representar las expresiones negativas. Además, con este manipulativo se puede representar la multiplicación y división, tanto de números enteros, como de polinomios y la factorización de polinomios. En la Figura 2 se ilustra un diagrama de la **Politabla Dreyfous**.

Figura 1. Piezas del manipulativo **Algeblocks**

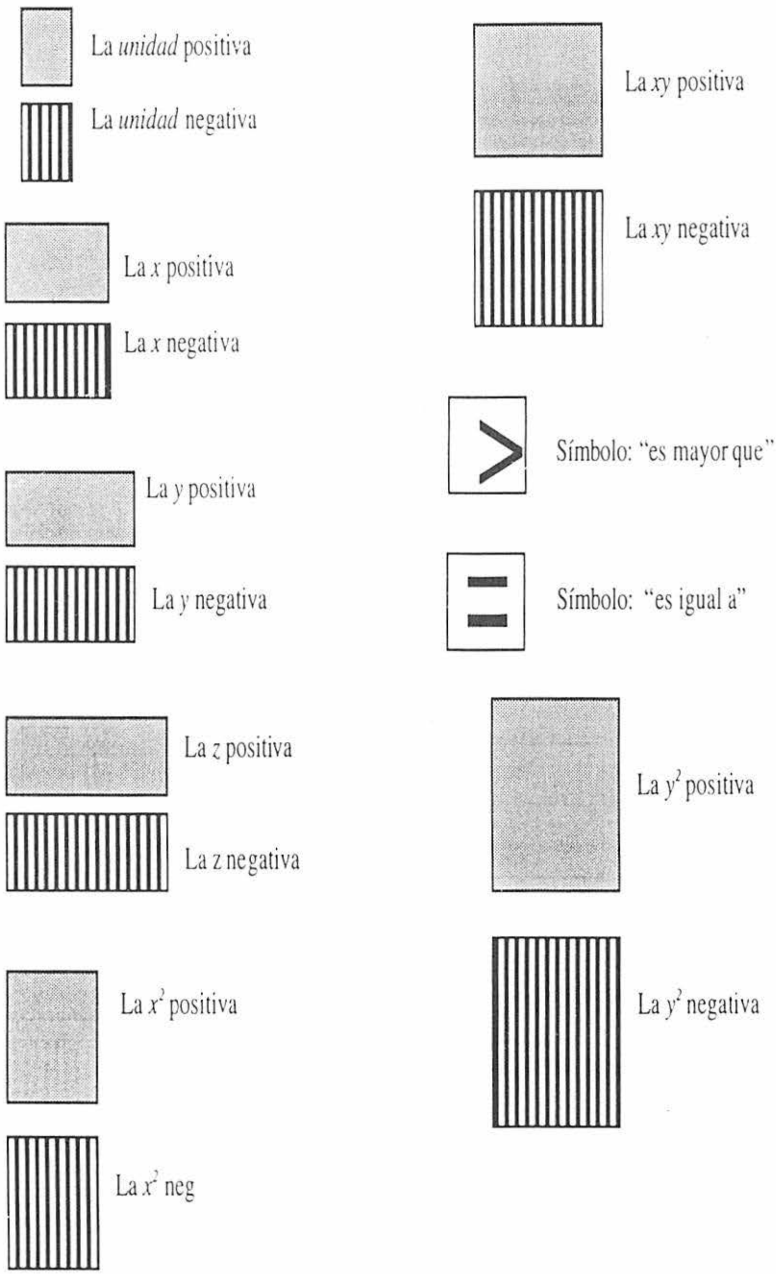

Figura 2. Diagrama de la **Politabla Dreyfous**