ROSALIND ROPER, M. A.

Facultad de Pedagogía
Universidad de Puerto Rico.

CÓMO LOGRAR QUE AL NIÑO LE GUSTE LA ARITMÉTICA

PARA lograr que al niño le guste la aritmética debemos comenzar por saber qué condiciones deben satisfacerse para sentir gusto por algo. Esto es: para lograr que al niño le guste la aritmética, debemos comenzar por asegurarnos que sabemos: ¿Qué es gustar? Luego habrá tiempo suficiente para forjar planes con respecto a la aritmética.

De acuerdo con el diccionario de la Real Academia (15a. edición, 1925), *gustar* es, entre otras cosas, el *desear,* querer y tener *complacencia* en una cosa. Y *complacencia* es *satisfacción,* placer y contento que resulta de alguna cosa. Satisfacción a su vez significa confianza o seguridad de ánimo y también aquietarse y convencerse con una eficaz *razón,* de la duda o queja que se había formado. Se *convence* a alguien cuando se le prueba algo de manera que *racionalmente* no lo puede negar. Racional significa perteneciente a la *razón* y una razón es un argumento o demostración que se aduce en apoyo de alguna cosa.

¡Cuántas ideas están involucradas en la expresión "para que a uno le guste algo"! ¡Pero aún significa mucho más el *despertar* o *mantener* el gusto del niño por la aritmética!... No solamente debe el niño conocer las demostraciones. La experiencia concreta es lo fundamental. Más aún; el niño debe comprender los argumentos que regulan las relaciones numéricas, y para esto debe dominar el vocabulario necesario para expresar esas relaciones. No es sencillo el problema de despertar el gusto por las matemáticas. Además de conocer la demostración y el vocabulario necesario para hablar sobre las relaciones numéricas, el niño también necesitará *conocer* el *simbolismo* aritmético de manera que lo reconozca, lo recuerde y lo interprete correctamente dondequiera que aparezca.

Vemos, pues, que para despertar o mantener el gusto por la aritmética es necesario enseñar cada tema teniendo en mente que se debe pasar gradualmente de la experiencia *concreta*, a la *semiconcreta*, a la *semiabstracta*, para finalmente llegar a la *abstracción* del *simbolismo*. A todo ese proceso gradual es al que nos referimos cuando decimos que es necesario enseñar la aritmética con *significación matemática*.

Tampoco termina ahí nuestro problema de despertar o mantener el gusto por la aritmética. Una vez que el niño comprenda la significación matemática tenemos que lograr que esa comprensión no sea pasajera. Antes bien, deseamos que sea una comprensión permanente, un conocimiento duradero que pueda usarse en cualquier momento. Es, pues, necesario grabar bien esos conceptos en la mente del niño. Para fijar esos conceptos ya comprendidos, es, desde luego, muy importante proveer la práctica necesaria. No podemos dejar de suministrar la práctica adecuada para fijar los conceptos de matemática. Lo importante es que cuando se dé la práctica, el niño debe estar consciente de lo que hace.

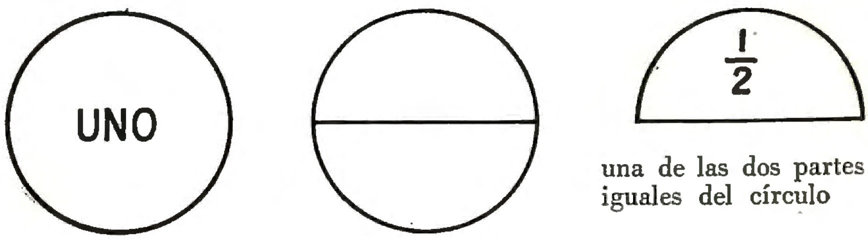
Finalmente: si el niño logra *sentirse en confianza* con la aritmética, esto es, si logra sentirse seguro de poder aplicar la aritmética correctamente, entonces podrá comprender y apreciar que la aritmética es la ciencia que puede rendirle el gran servicio (¡tan deseado!), de sacarle de las *confusiones cuantitativas del diario vivir*... Y es a esto: 1) al conocimiento de que para resolver nuestros problemas cuantitativos acudimos a la aritmética; 2) a la integración entre el problema cuantitativo de nuestro medio ambiente y el proceso aritmético necesario para salir de ese estado de confusión en que nos encontramos, a esto es a lo que llamamos significación social. Pues bien, para lograr que al niño le guste la aritmética debemos siempre enseñar la aritmética con ambas significaciones: con la importantísima significación matemática y la significación social.

A la significación social ya se le ha dedicado, y se le debe seguir dedicando gran importancia. Detengámonos, pues, un rato en la significación matemática. ¿Cuáles son esas *demostraciones* que el niño debe conocer? ¿Cuál es el *vocabulario* y cuáles son esos *argumentos* que regulan las relaciones numéricas? ¿Cuáles son esos símbolos que debe reconocer e interpretar correctamente?

Para los efectos de explicar más claramente lo que debe entenderse por significación matemática, tomemos algún tema de la aritmética como ejemplo. ¿Qué debe entender el niño sobre las *fracciones comunes?* Debe entender que los números enteros nos ayudan mucho en la vida, pero que no son suficientes para el hombre. Hay grupos que no poseen la propiedad numérica de tener 3 elementos o 4 elementos sino que constan de 3 elementos y un poco más, pero sin llegar a 4. Otros grupos no tienen ni aun *un* elemento sino que tienen solamente parte de ese elemento. Otros grupos tienen 4 elementos y un poco más, pero sin llegar a cinco elementos. Esas *partes del entero* las llamamos también *fracciones* del entero. Y es que en nuestro mundo existen muchas cantidades que no pueden expresarse mediante un número entero, sino mediante enteros y fracción de enteros. De dos grupos, si cada uno tiene tres elementos y un poquito más, ¿cuál es mayor? ¿Cuál de los dos poquitos es más poquito? ¡Oh confusión para el hombre que se empeña en saber cuánto hay!... Es precisamente a esos poquitos o *partes del entero* a los que llamamos *fracciones*. Y bien, ¿cuál de dos fracciones es la menor? ¡Pues para salir de dudas el hombre se decidió a comparar! Y desde luego que para ser justos al comparar, hay que subdividir las unidades de medida en la misma cantidad de partes iguales. Luego se pueden comparar las fracciones del entero y decidir dónde hay más partes iguales; o sea decidir cuál es mayor.

Pero de igual manera que procedió con las otras clases de numerales, el hombre necesitó inventar un símbolo que expresara esa cantidad. Debe el niño comprender esto y apreciar que el nuevo símbolo expresa 1) el número de partes iguales en que se dividió la unidad original y 2) también expresa la cantidad de esos nuevos elementos iguales, que él usará. Así surgen los símbolos para las fracciones. Éstos son: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$, etc., y esos símbolos los usaremos para expresar *cantidad* junto con su *clasificación*. En términos generales se dice que todas las fracciones comunes son números de la forma: $\left(\frac{a}{b}\right)$. Y, ¿por qué son números? Porque todo número expresa cantidad y también, *todo aquello que expresa cantidad, es un número*... Precisamente esos nuevos símbolos expresan cantidad además de clasificación. En el número: $\left(\frac{a}{b}\right)$, las letras *a* y *b* no se usan meramente como letras sino como números. Esto es: esas letras expresan una cantidad, aunque una cantidad desconocida. Por ejemplo, en un paquete de papel que aún no hayamos abierto, no sabemos qué cantidad de papel hay, pero si abriéramos el paquete y contáramos, sí que sabríamos. Así sucede cuando usamos las letras como números; no sabemos a qué número específico corresponde, pero sí sabemos que tiene algún valor específico. La letra *b* indicará la cantidad de partes iguales en que se reparte la unidad. A esto también se le puede llamar la clasificación de la fracción. Desde luego que *b* puede tener cualquier número entero como valor, pero no puede ser igual a *cero* ya que *b* es la cantidad de partes iguales en que se distribuye la unidad, y ésta hay que repartirla en por lo menos una y solamente una parte... La *a* en el número $\left(\frac{a}{b}\right)$ representa cualquier número entero, aun incluyendo el cero, ya que la *a* indica la *cantidad* que tenemos.

Para entender y apreciar los números fraccionarios, hay que acostumbrarse a comparar grupos y también hay que saber distribuir elementos en grupos iguales. Por ejemplo: $\left(\frac{1}{2}\right)$ significa: distribuir los elementos de un solo grupo *en dos partes* iguales y tomar una y solamente una de esas dos partes iguales. Ejemplo 2: $\left(\frac{1}{2}\right)$ de 10 centavos significa: distribuir esos 10 centavos en dos grupos iguales con respecto a centavos, y entonces tomar uno y solamente uno de esos dos grupos iguales. Repetimos: puesto que $\left(\frac{1}{2}\right)$ es un número, ese número nos indica la cantidad de grupos iguales que tenemos y la clase de grupos que tenemos. Esto es:



dos partes iguales

una de las dos partes iguales del círculo

El niño debe aprender que una de dos partes iguales se escribe: $\left(\frac{1}{2}\right)$. Para que pueda realmente familiarizarse con esto, debe el maestro darle práctica en contar de medio en medio diciendo: 1 medio, 2 medios, 3 medios, 4 medios, 5 medios, etc., de la misma manera que contaría 1 automóvil, 2 automóviles, 3 automóviles, 4 automóviles, etc. En este caso, automóvil es la clasificación de lo que se cuenta. En el caso anterior, *medio* era la clasificación de lo que se contaba. Pero además de saber contar de medio en medio usando la palabra, debe el niño poder escribir la sucesión de números fraccionarios, de medio en medio y pensando que *medio* es la clasificación: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}$, etc.

Además, también el niño debe saber contar de tercio en tercio, de cuarto en cuarto, de quinto en quinto, etc. Y luego debe también poder descomponer las fracciones en sus componentes: $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, lo mismo que ya había aprendido a descomponer enteros en sus componentes: $3 = 1 + 1 + 1$. De igual manera que con números enteros se recalcaba el poder descomponer un entero de diferentes maneras, también es necesario que se le dé práctica al niño en descomponer números fraccionarios de distintas maneras. Debe saber descomponer cualquier fracción en sus componentes. Debe saber que $\frac{4}{5}$ se lee 4 quintos y significa que tenemos cuatro elementos y esos elementos son *quintos*. O sea que debe saber que 4 quintos significa 1 quinto + 1 quinto + 1 quinto + 1 quinto. Usando símbolos, $\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Veamos algunas de las maneras posibles de descomponer el número:

$\frac{8}{5}$ es $\frac{7}{5} + \frac{1}{5}$ $\qquad$ $\frac{8}{5}$ es $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$

$\frac{8}{5}$ es $\frac{6}{5} + \frac{2}{5}$ $\qquad$ $\frac{8}{5}$ es $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}$

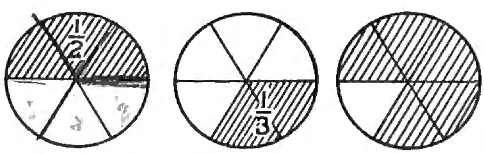
$\frac{8}{5}$ es $\frac{3}{5} + \frac{5}{5}$ $\qquad$ $\frac{8}{5}$ es $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$

$\frac{8}{5}$ es $\frac{6}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ $\qquad$ $\frac{8}{5}$ es $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$

A esto le llamamos la idea de composición del número $\left(\frac{8}{5}\right)$ y es éste uno de los significados matemáticos de $\frac{8}{5}$. Ya *en esos ejercicios* se nota que a veces se cuenta regularmente. Esto sucede cuando lo que se añade es siempre la misma cantidad y de la misma clase que se tenía... Pero también es necesario contar irregularmente. La suma no es otra cosa que contar irregularmente. Pero en todos esos casos, aunque se esté contando irregularmente, se están sumando *fracciones que tienen el mismo denominador*. A estas fracciones se les llaman *fracciones ho-*

mogéneas o *fracciones semejantes*. El niño debe saber que la ley de semejanza es la que dispone que para sumar cosas de la misma clase se retiene la clasificación común y se cuenta a ver qué cantidad se tiene... El problema grande surge cuando se necesitan sumar fracciones que no son semejantes. Por ejemplo: ¿cuánto es $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$? En casos como éste, hay que recordar que el símbolo $+$ indica suma y como un *medio* no es de la misma clase que un *tercio*, se pueden juntar esas dos cantidades siempre que se separen por el símbolo: $+$. Por tanto es muy posible decir que: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. En la práctica, sumar es meramente juntar, agregar o añadir y por lo tanto, para agregarle a la mitad de algo, la tercera parte de algo, es suficiente que juntemos esas partes y así hemos resuelto el problema. Pero puede ser que alguien esté interesado en determinar qué parte de un entero es $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$. En este caso debe el niño saber que como esas fracciones no son semejantes, no es posible decir ni que tenemos 2 mitades, ni que tenemos 2 tercios, ni aun que tenemos 2 quintos. Es necesario entonces obtener un denominador común, esto es, necesitamos expresar la fracción $\left(\frac{1}{2}\right)$ y la fracción $\left(\frac{1}{3}\right)$ en forma distinta, pero equivalente. Si cada uno de los medios del entero lo dividimos en tres partes iguales, y si cada uno de los tercios del entero lo dividimos en dos partes iguales, habremos logrado en ambos casos, repartir el entero en seis partes iguales. Cada una de esas fracciones puede entonces ser representada como sextos. Debe el niño entender todo esto y debe poder hacer esquemas que ilustren este procedimiento.

$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$



$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

Es precisamente este aspecto de la suma de fracciones, el que el niño debe realmente entender. Debe entender bien la ley de semejanza para suma, para que pueda él aplicarla cada vez que necesite sumar fracciones semejantes o fracciones desemejantes* Debe el maestro saber hacer los dibujos necesarios para que el niño entienda bien la situación de que, por ejemplo: $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ no es ni 2 medios, ni 2 cuartos, ni 2 sextos. Éstos serían resultados que podría dar el niño si no entendiera la situación. Conviene *que el niño descubra que sumando los números tal cual aparecen, no resulta en la obtención de la respuesta correcta;* la única manera de saber qué parte de un entero es un medio de él más la cuarta parte de él, es mediante un esquema o cambiando las fracciones a fracciones semejantes.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Resumiendo diré que el niño debe entender que para sumar o restar cantidades, éstas deben ser de la misma clase, si es que queremos una sola clase de cantidades en nuestro resultado. Ejemplo: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\neq{}^{*}\frac{2}{4}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\neq\frac{2}{2}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\neq\frac{2}{6}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\neq\frac{1}{6}$

Pero $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ sí es igual a $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Aquí tenemos, sin embargo, dos distintas clases de cantidades en el resultado. Ahora bien, si queremos obtener una sola clase de cantidad (fracción) en el resultado, debemos sumar fracciones de la misma clase; o sea fracciones semejantes, solamente. Ya que $\left(\frac{1}{2}\right)$ no es semejante a $\left(\frac{1}{4}\right)$, el problema que surge al resolver $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$

* Fracciones *desemejantes* son las fracciones que no son *semejantes.*
* El símbolo $\neq$ se lee: *no es igual a.*

es el de descubrir cómo representar la fracción $\frac{1}{2}$ o la fracción $\frac{1}{4}$ de una manera equivalente a estas fracciones, de modo que tengan un *denominador común* para las fracciones equivalentes a éstas. Una de las maneras de comenzar el estudio de fracciones equivalentes, es preparar una gráfica como la siguiente, donde se muestre el entero y sus equivalentes en fracciones:

<table>
<tr><td colspan="32">1</td></tr>
<tr><td colspan="16">$\frac{1}{2}$</td><td colspan="16">$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="8">$\frac{1}{4}$</td><td colspan="8">$\frac{1}{4}$</td><td colspan="8">$\frac{1}{4}$</td><td colspan="8">$\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\frac{1}{8}$</td><td colspan="4">$\frac{1}{8}$</td><td colspan="4">$\frac{1}{8}$</td><td colspan="4">$\frac{1}{8}$</td><td colspan="4">$\frac{1}{8}$</td><td colspan="4">$\frac{1}{8}$</td><td colspan="4">$\frac{1}{8}$</td><td colspan="4">$\frac{1}{8}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{16}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td><td>$\frac{1}{32}$</td></tr>
</table>

Si le mostramos este dibujo al niño y *le hacemos las debidas preguntas,* llegará a entender que: 1) en un entero hay $\frac{2}{2}$ hay $\frac{4}{4}$, hay $\frac{8}{8}$, hay $\frac{16}{16}$, hay $\frac{32}{32}$ etc.; 2) en $\frac{1}{2}$ hay $\frac{2}{4}$, hay $\frac{4}{8}$, hay $\frac{8}{16}$, hay $\frac{16}{32}$; 3) en $\frac{1}{4}$ hay $\frac{2}{8}$, hay $\frac{4}{16}$, hay $\frac{8}{32}$ 4) en $\frac{1}{8}$ hay $\frac{2}{16}$, hay $\frac{4}{32}$; 5) en $\frac{1}{16}$ hay $\frac{2}{32}$

El niño puede también preparar otras gráficas semejantes a ésta, pero donde se noten las equivalencias entre un entero, sus tercios, sus novenos, etc., o también, un entero, sus tercios, sus sextos, sus dieciochavos, etc. Después que el niño haya estudiado las equivalencias entre las fracciones, de acuerdo con las gráficas mencionadas, estará preparado para descubrir un método más rápido para cambiar fracciones comunes a fracciones equivalentes. Por ejemplo, puede (y debe) notar que en determinada parte de un entero, si se aumenta la cantidad de partes iguales en que éste se distribuye, habrá que tomar también mayor cantidad de esas partes, para cubrir la misma parte determinada del entero original. Estos cambios nos sugieren que posiblemente la manera de cambiar una fracción a una fracción equivalente es mediante el uso de la ley de compensación para dividir. Esta ley explica que el resultado de una división no se altera si multiplicamos a ambos dividendo y divisor por la misma cantidad, si dividimos a ambos dividendo y divisor entre la misma cantidad. Ejemplo con números enteros: si $8 \div 4 = 2$, entonces $(8 \times 5) \div (4 \times 5)$ también es 2.

Veamos: $40 \div 20 =$ ¿? ¡2!

Ejemplo 2: si $100 \div 25 = 4$, entonces: $(100 \div 5) \div (25 \div 5)$ es también 4

Veamos $(20) \div 5 =$ ¿? ¡4!

Ya que uno de los significados de las fracciones es *una división indicada* —esto es: *el numerador entre el denominador*, se les puede aplicar también a las fracciones comunes, esta ley de compensación. Pero cuando esta ley se usa con números fraccionarios, cambia de nombre y se llama la *ley de oro*. La *ley de oro* dice que si ambos, numerador y denominador de una fracción, se multiplican por la misma cantidad, el valor de la fracción no se altera. Tampoco se altera el valor de una fracción si dividimos a ambos numerador y denominador de una fracción entre la misma cantidad. Ejemplo: Ya antes habíamos dicho que el niño podía notar del estudio de la gráfica anterior que $\left(\frac{1}{4} = \frac{2}{8}\right)$. Veamos cómo obtenemos ese mismo resultado si usamos la ley de oro. $\frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$. También podemos usar esa ley de oro para cambiar fracciones a términos menores:

Ejemplo: $\frac{45}{81} = \frac{45 \div 9}{81 \div 9} = \frac{5}{9}$

Resumiendo: Según los maestros de los primeros grados recalcan todos los significados de los números naturales, así también los maestros de cuarto grado en adelante deben dar a sus alumnos todos los significados relacionados con la fracción común. Deben los alumnos entender la idea de grupo, la idea de composición, la idea de serie y también la idea de comparación referentes a las fracciones comunes. Entonces podrá la maestra pedir al alumno que cuente primero regularmente y luego irregularmente. Así se habrá pasado gradualmente, del contar al sumar.

Ahora veamos cómo es también posible pasar gradualmente *de la suma a la multiplicación.* Para esto detengámonos un rato en los siguientes ejercicios:

$$\frac{8}{5}=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}$$

$$\frac{8}{5}=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$$

$$\frac{8}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$$

Debemos notar que aquí todos los sumandos son exactamente el mismo y por eso tendemos a preguntarnos: ¿cuántos sumandos de la misma clase hay? Describimos esos ejercicios en la siguiente forma: $\left(\frac{8}{5}\right)$ es 2 veces el $\left(\frac{4}{5}\right)$ sumado, $\left(\frac{8}{5}\right)$ es 4 veces el $\left(\frac{2}{5}\right)$ sumado; $\frac{8}{5}$ es 8 veces el $\left(\frac{1}{5}\right)$ sumado...

Pues bien, el niño debe haber aprendido ya que existe un símbolo que abrevia y significa lo que indica cada una de esas ideas; esto es: la *cantidad de veces que un grupo ha de ser sumado.* Este símbolo es: $\times$ (el de multiplicar). El símbolo $\times$ se usa para indicar el número de veces que algo ha de sumarse. Ya el niño había estudiado y usado ese símbolo en relación con los números enteros. Por eso su maestro podrá decirle que, según cuando se trabajaba con números enteros, se describían 2 centavos + 2 centavos + 2 centavos, como tres veces el 2 centavos escrito para sumarse y se abreviaba simbólicamente

3×2 centavos; según $30¢ + 30¢$ se describía como 2 veces 30 centavos escrito para sumarse, y se abreviaba simbólicamente 2×30 centavos se hará lo mismo con las fracciones comunes. Esto es: describiremos $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ como 4 veces el $\left(\frac{1}{3}\right)$

escrito para sumarse y se abreviará simbólicamente: $4 \times \frac{1}{3}$

Debe, pues, el maestro dar práctica al niño en conocer e interpretar esos dos símbolos que se usan para sintetizar: $+$ y $\times$. Debe preguntársele al niño: ¿qué significará cada uno de los siguientes ejercicios: (7×8), $(3 \times 2$ ft.$)$, $(2 \times 5$ pies cuadrados$)$, (4×0)? En lugar de decir que la multiplicación es una manera corta de sumar siempre la misma cantidad, el maestro debe dar ejercicios *que lleven al niño a descubrir* o *a practicar esa idea* hasta comprenderla. Él debe poder decir que 4×0 significa: $0 + 0 + 0 + 0$ y es $=$ a 0; que $2 \times \frac{4}{5}$

significa $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}$

y su resultado es $\frac{8}{5}$; que $4 \times \frac{2}{5}$ significa $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$

y su resultado es $\frac{8}{5}$; que $8 \times \frac{1}{5}$ significa $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$

$+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ y su resultado es $\frac{8}{5}$; que $4 \times \frac{1}{5}$

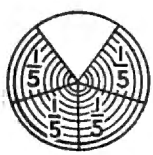
significa $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ y su resultado es $\frac{4}{5}$. Ya en esta forma se ha iniciado al niño en el estudio del significado matemático de la multiplicación de un entero por una fracción. Después que el niño haya explicado el significado de muchos ejercicios como éstos, será tiempo suficiente para que el maestro le haga pensar en inventar una manera más corta para resolver ejercicios como los ya mencionados. Ejemplo: $2 \times \frac{4}{5}$. Debe el niño recordar que esto no es otra cosa que 2×4 quintos; o sea, que cuando sumamos fracciones comunes semejantes, al igual que cuando sumamos cantidades semejantes, nunca cambia la clasificación de los sumandos; ie: el denominador no cambia; lo que sí cambia es la *cantidad*. Finalmente será *el niño* quien *descubrirá* que: $2 \times \frac{4}{5} = \frac{2 \text{ X } 4}{5}$ y eso es igual a $\frac{8}{5}$

$4 \times \frac{2}{5} = \frac{4 \text{ X } 2}{5}$ y eso es igual a $\frac{8}{5}$

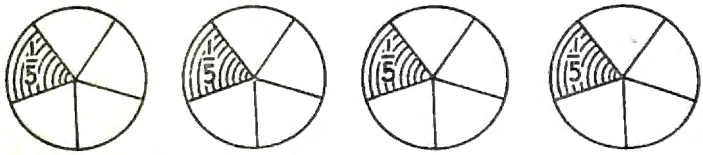
$8 \times \frac{1}{5} = \frac{8 \text{ X } 1}{5}$ y eso es igual a $\frac{8}{5}$

$4 \times \frac{1}{5} = \frac{4 \text{ X } 1}{5}$ y eso es igual a $\frac{4}{5}$

Estudiemos la fracción $\frac{4}{5}$. Ya que esa fracción se lee 4 quintos, significa que tenemos $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)$. Pero esas 4 *quintas partes* pueden obtenerse del mismo entero. Véase la ilustración: o sea $\left(\frac{1}{5}\right.$ de un círculo$\left.\right) + \left(\frac{1}{5}\right.$ del mismo círculo$\left.\right) + \left(\frac{1}{5}\right.$ del mismo círculo$\left.\right) + \left(\frac{1}{5}\right.$ del mismo círculo$\left.\right)$. Esto se abrevia: $4 \text{ X } \frac{1}{5}$. Pero también podemos notar que de ese círculo se han tomado 4 de las 5 partes iguales en que se repartió.

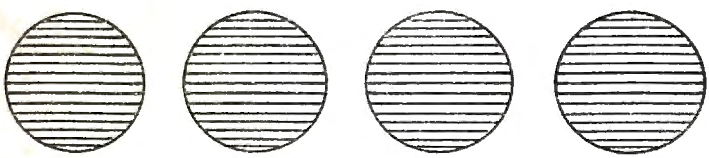


Esta otra idea se abrevia como $\frac{4}{5}$ de 1. Notemos aquí que $4 \text{ X } \frac{1}{5}$ significa sumar $\frac{1}{5}$, cierto número de veces. Pero $\frac{4}{5}$ de 1 significa *tomar cierta parte de un entero*. Hay una diferencia en significado, pero hay igual cantidad en $\left(4 \text{ X } \frac{1}{5}\right)$ que, en$\left(\frac{4}{5} \text{de } 1\right)$. Además debe el niño darse cuenta de que cuando decimos que $\frac{4}{5}$ significa $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, no hemos dicho si esas quintas partes son todas del mismo entero, o si son de distintos enteros. Estudiemos el caso en que hayan surgido de distintos enteros, aunque sí sean todos iguales entre sí e iguales al entero de la figura 1. Aquí hemos tomado $\frac{1}{5}$ de cada uno de los 4 enteros. Esto se abrevia: $\left(\frac{1}{5}\text{de } 4\right)$. Ahora bien, ¿es la cantidad de sombra de la fig. 1 igual que la can-

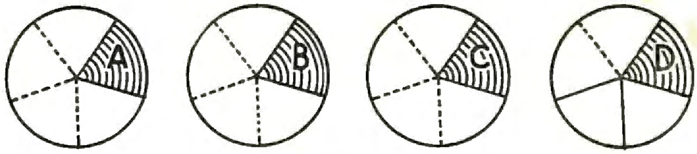


tidad de sombra de la fig. 2? Sí. (Es importante recordar que todos los enteros son iguales.) Podemos decir por lo tanto que: $\left(4 \times \frac{1}{5}\right)$ es igual cantidad que $\left(\frac{4}{5}\text{de } 1\right)$ e igual cantidad que $\left(\frac{1}{5}\text{de } 4\right)$.

Pero es que $\left(\frac{1}{5}\text{de } 4\right)$ también podría significar que deseamos repartir esos cuatro círculos (o enteros) iguales, en 5 partes iguales y que nos interesa tomar solamente *una* de esas 5 partes iguales.

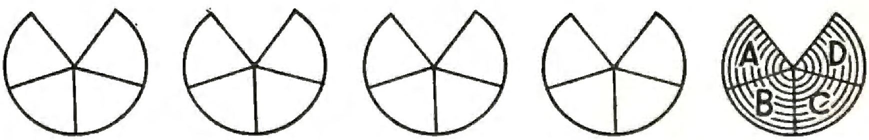


¿Cómo podremos dividirlos en cinco partes iguales si solamente tenemos cuatro círculos? Una manera de hacer esto es dividir cada uno de ellos en 5 partes iguales y luego tomar la $\frac{1}{5}$ parte de cada uno de ellos.



Si sumamos $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ tendremos $\frac{4}{5}$.

Pero si de cada uno de los círculos enteros le sacáramos $\frac{1}{5}$ parte, cada uno de ellos se quedaría en $\frac{4}{5}$ del círculo original. Pero en este caso tendríamos cinco grupos



iguales. Uno de esos grupos es el que correspondería a la quinta parte de los cuatro círculos originales. Vemos, pues, que $\left(\frac{1}{5}\right.$ de todos los cuatro círculos$\left.\right)$ es igual que $\left(\frac{4}{5}\text{de } 1\right)$.

Estas figuras y estos argumentos deben conducir al niño a comprender que $\frac{1}{5}$ de cada uno de 4 enteros se puede también interpretar como *una de las cinco partes iguales* en que se desea distribuir cuatro enteros iguales, i.e: $\left(\frac{1}{5}\text{de } 4\right)$. Debe también saber el niño que la *quinta parte de cada uno de 4 enteros* es lo mismo que la *quinta parte de cuatro*. En ambos casos se usa el símbolo: $\times$, para abreviar simbólicamente esas ideas. En otras palabras, el símbolo $\times$, tiene un segundo uso y es: obtener cierta parte de alguna cantidad. En nuestro caso: $\frac{1}{5} \times 4$ corresponde a la $\frac{1}{5}$ parte de cada uno de 4 enteros;

$\frac{1}{5}$ x 4 también corresponde a la $\frac{1}{5}$ parte de los cuatro enteros.

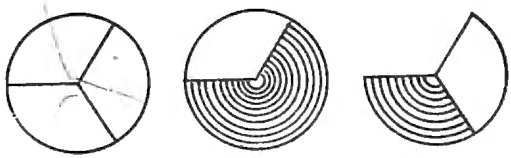
El niño debe tener experiencias análogas a ésta aunque usando muchas otras fracciones, de modo que él realmente entienda que aunque $\left(\frac{1}{5} \times 4\right)$ no significa lo mismo que $\left(4 \times \frac{1}{5}\right)$, no obstante, en $\frac{1}{5} \times 4$ hay igual cantidad que en $\left(4 \times \frac{1}{5}\right)$. Por eso escribimos: $\frac{1}{5} \times 4 = 4 \times \frac{1}{5}$. Debe el niño recordar que el signo de =, se usa para indicar que tenemos iguales cantidades. Finalmente, debe ser el niño quien razone que al igual que con números enteros, el orden de los factores no altera el producto obtenido, aun cuando usemos números fraccionarios.

El niño debe entender esta exposición anterior, y a su vez debe poder hacer gráficas mostrando que $4 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 4$ o que $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times 3$, etc. Una vez que el niño comprenda que $\frac{1}{2} \times 3$ significa la mitad de 3, o la mitad de cada uno de tres, $\frac{1}{3}$ de 2 significa la tercera parte de 2 o la tercera parte de cada uno de 2, será tiempo para que descubra *qué significa* $\frac{2}{3}$ de 9. Esto es: hay que buscar la tercera parte de 9, y tomar dos de esas partes... Por lo tanto: $\frac{2}{3}$ de 9 equivale a $2 \times \frac{1}{3}$ de $9 = 2 \times \frac{9}{3} = 2 \times 3 = 6$

Después que se saben estos ejercicios, se pasará a estudiar cómo multiplicar dos fracciones comunes. Por ejemplo: $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ Pero aun aquí puede el maestro hacer que sea el niño quien descubra cómo efectuar esa operación. Si en este caso se considera el $\frac{3}{4}$ como un número, se puede *pensar* que $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ significa la mitad del número $\frac{3}{4}$. O sea, que debemos dividir nuestro número $\frac{3}{4}$ en 2 partes iguales; debemos considerar el resultado como parte del entero original. Veamos, pues, ciertos significados: $10 \times \frac{2}{5}$ significa: $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$ pero $\frac{2}{5} \times 10$ significa $\frac{2}{5}$ de 10 o sea que deberemos tomar 2 de las 5 partes iguales del 10. Por lo tanto, se operará así $2 \times \frac{10}{5}$. Eso es igual que: 2×2 o sea: 4

2.

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ significa: la mitad del número o cantidad: $\frac{2}{3}$

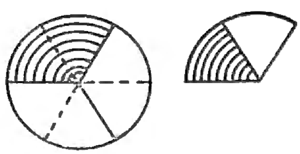


el entero | ⅔ del entero | la ½ de ⅔ del entero está en sombra.

3.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ significa: la mitad del número o cantidad: $\frac{1}{3}$

⅓ | ½ de ⅓

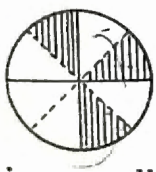


¿Qué parte del círculo completo es la mitad de la tercera parte? Si cada uno de los $\frac{3}{3}$ que forman el círculo los dividimos en dos partes iguales, tendremos el círculo completo dividido en seis partes iguales. Debe el niño notar que la mitad de la tercera parte, es precisamente una de las seis partes iguales del círculo, o sea: $\frac{1}{6}$

4.

$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ significa: ¿Qué parte del entero original es la mitad del número (o de la cantidad) $\frac{3}{4}$? ¿Qué parte del entero original es la mitad de cada uno de esos 3 cuartos? *Ya que el resultado final debe ser relativo a todo el entero original,* debemos pensar que conviene que obtengamos primero la mitad de cada uno de los cuartos, para así saber con qué clase de partes estaremos trabajando. (En nuestro ejercicio: $\frac{1}{8}$). Esto es: tendremos el entero repartido en 8 partes iguales. Una vez hecho eso, deberemos tomar una y solamente una de las dos partes iguales de cada uno de los 3 cuartos. Tendremos por lo tanto tres octavas partes del entero. Ese resultado se escribe: $\frac{3}{8}$. Debemos, pues, notar que $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

Ese resultado se obtiene mecánicamente: $\frac{1 \times 3}{2 \times 4} \div \frac{3}{8}$

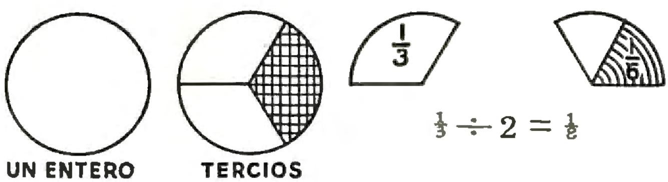


La división de fracciones conlleva el poder entender el símbolo: $\div$. Ese símbolo puede tener *dos significados*: 1) repartir en cierto número de grupos iguales para obtener cantidad y calidad de elementos en cada grupo. *Ej. 1* $\frac{1}{2} \div 2$ significa repartir el número $\frac{1}{2}$ en 2 partes iguales y decir qué parte del entero original se tiene.

Notamos, pues, que dividir $\frac{1}{2}$ entre 2 equivale a obtener la mitad de $\frac{1}{2}$. O sea que $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

Ejemplo 2.

$\frac{1}{3} \div 2$ significa repartir $\frac{1}{3}$ en 2 partes iguales



¿Qué parte del círculo es $\frac{1}{3} \div 2$?

Notemos que dividir $\frac{1}{3} \div 2$, equivale a obtener la $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ o sea: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, o sea $\frac{1}{6}$

Ejemplo 3.

$\frac{1}{2} \div 3$ significa repartir $\frac{1}{2}$ en 3 partes iguales y tomar 1 de esas partes.

¿Qué parte del círculo es $\frac{1}{2} \div 3$?

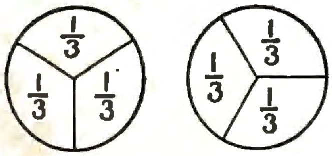
Notemos que dividir $\frac{1}{2} \div 3$ equivale a obtener la $\frac{1}{3}$ de la $\frac{1}{2}$ o sea $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Si se resuelven varios ejercicios de esta manera, llegará el niño a comprender que repartir en tres partes iguales y obtener una y solamente una de esas partes, se puede simbolizar de dos maneras distintas y con dos símbolos distintos: ¿? $\div$ 3 ó $\frac{1}{3} \times$ ¿ ?. También podemos decir que: ¿? $\div$ 2 significa lo mismo que: $\frac{1}{2} \times$ ¿? También podemos decir que: ¿? $\div$ 8 significa lo mismo que: $\frac{1}{8} \times$ ¿? En términos generales debe el niño saber que dividir un grupo entre un entero, equivale a obtener cierta parte del grupo original. Esto no es exclusivo de las fracciones comunes; aun con enteros debe el niño saber que $4 \div 2$ equivale a obtener la $\frac{1}{2}$ de 4 o sea que: $4 \div 2 = \frac{1}{2} \times 4$. Pero como: $\frac{1}{2} \times 4 = 4 \times \frac{1}{2}$, podemos también decir que *(4 $\div$ 2) tiene igual resultado que* $\left(4 \times \frac{1}{2}\right)$ Por lo tanto podemos llegar a la conclusión de que: *dividir entre dos equivale a multiplicar por: un medio.* $\left(\div 2 = \times \frac{1}{2}\right)$

Ahora bien, el símbolo $(\div n)$, tiene dos significados y ya mencionamos uno. Éste es el de: repartir en *n* partes iguales. ¿Cuál es el otro significado del símbolo y cuándo se usa? $2 \div \frac{1}{2}$, $2 \div \frac{1}{3}$, $3 \div \frac{1}{2}$. ¿Qué *significará* cada uno de esos ejercicios? Y hay que recalcar el *significado;* porque ¿de qué le vale al niño poder dar un resultado mecánico? ¡Si él no entiende el problema, mucho menos entenderá el resultado y por tanto, no sabrá aplicarlo a situaciones en su vida! Pues bien: $2 \div \frac{1}{2}$ se interpretará: ¿Cuántas mitades hay en dos enteros? O también: ¿Es 2 más grande que el número $\frac{1}{2}$? ¿Cuántas veces? ¿Cuántas veces habrá que escribir la cantidad: $\frac{1}{2}$, y sumar, para obtener como resultado el número 2? ¡ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 2$! ¿Cuántas veces escribimos el $\frac{1}{2}$? ¡Cuatro veces! Decimos en este caso que 2 es 4 veces lo que es $\frac{1}{2}$ y también decimos que 2 es 4 veces mayor que $\frac{1}{2}$. También podemos decir que hay 4 mitades en 2 enteros. Conviene que el niño se familiarice con todas esas expresiones. Conviene que el niño sepa que en 2 hay $\frac{3}{2}$ más que lo que hay en $\frac{1}{2}$ y que por tanto decimos que 2 es $1\frac{1}{2}$ *unidades mayor que* $\frac{1}{2}$. Sin embargo, también decimos que 2 es *4 veces mayor que* $\frac{1}{2}$. Decimos que 2 es 4 veces mayor que $\frac{1}{2}$ porque es necesario escribir el número $\frac{1}{2}$ cuatro veces y sumar, para poder obtener la cantidad (o el número) *2.*

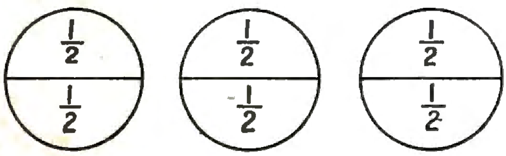
El maestro debe saber todo esto y debe apreciar la importancia de entender estas ideas, este vocabulario y este simbolismo. Pero también debe saber que para que el niño las sepa bien tiene primero que *entender* esto y luego tiene que practicarlo entendiéndolo. Por tanto, debe el maestro exigirle al niño que pueda explicar con gráficas y mediante argumentos que:

$2 \div \frac{1}{3}$ significa: ¿cuántos tercios entran en 2 enteros?



Entran 6.

$3 \div \frac{1}{2}$ significa: ¿cuántas mitades entran en 3 enteros?



Entran 6.

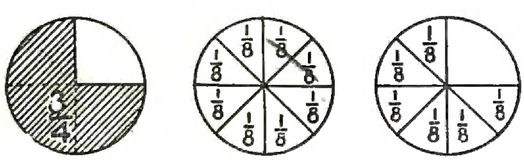
$4 \div \frac{1}{2}$ significa: ¿cuántas mitades entran en 4 enteros? ¡ocho!

$8 \div \frac{1}{3}$ significa: ¿cuántos tercios entran en 8 enteros? ¡24!

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$ significa: ¿cuántas mitades entran en $\frac{1}{2}$? ¡Una!

$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ significa: ¿cuántos cuartos entran en 3 cuartos? ¡Tres!

$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$ significa: ¿cuántos octavos entran en 3 cuartos?



¡Seis!

Ahora bien, en el caso anterior habíamos visto que dividir entre 4 equivale a multiplicar por $\frac{1}{4}$ ($\div 4 = \times \frac{1}{4}$). ¿Será también cierto que *dividir entre un cuarto* producirá el mismo resultado que *multiplicar por 4?* Estudiemos esta situación:

Hemos visto ya que: $2 \div \frac{1}{3} = 6$; ¿Cuánto es 2×3?

$3 \div \frac{1}{2} = 6$; ¿Cuánto es 3×2?

$4 \div \frac{1}{2} = 8$; ¿Cuánto es 4×2?

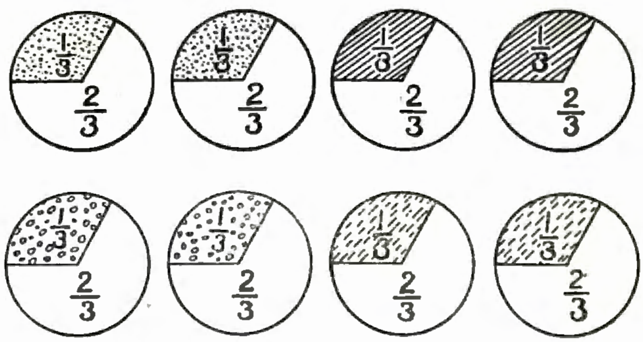
$8 \div \frac{1}{3} = 24$; ¿Cuánto es 8×3?

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$; ¿Cuánto es $\frac{1}{2} \times 2$?

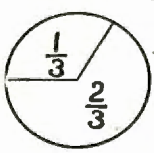
$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3$; ¿Cuánto es $\frac{3}{4} \times 4$?

$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = 6$; ¿Cuánto es $\frac{3}{4} \times 8$?

¿Qué significa: $9 \div \frac{2}{3}$? Significa: ¿cuántos $\frac{2}{3}$ entran en 9 enteros?



Entran 13 dos tercios y sobra un tercio. Ese sobrante es



la mitad de *dos* tercios, que era el tamaño del grupo que se había tomado. Por eso decimos que obtenemos en el resultado, 13 grupos y además, un grupito que es la mitad del tamaño de esos 13 grupos. Por eso damos el resultado como: $13\frac{1}{2}$ grupos.

Y bien, ¿cuánto es $9 \times \frac{3}{2}$? ¡También es $13\frac{1}{2}$! En esta forma (mediante el estudio de varios ejercicios, y mediante la comparación de resultados obtenidos de una manera y de otras maneras), se lleva al niño a descubrir inductivamente, que aunque no tiene el mismo significado, $(9 \div 3) = (9 \times \frac{1}{3})$; que $(9 \div \frac{2}{3}) = (9 \times \frac{3}{2})$; que $(\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}) = (\frac{3}{4} \times \frac{8}{1})$; que $(8 \div \frac{1}{3}) = (8 \times \frac{3}{1})$; que $(4 \div 3) = (4 \times \frac{1}{3})$; y finalmente que: $(a \div \frac{1}{b}) = (a \times b)$, etc. En otras palabras, que para dividir entre una fracción común, lo que se hace es que se invierte el divisor y entonces se multiplica. En términos generales, ¿por qué se invierte el divisor y se multiplica? Porque el resultado numérico que se obtiene al hacer eso, es igual al resultado que se obtiene resolviendo el ejercicio a base de significación. Si usamos en todo momento el método de la significación, tendremos comprensión del problema, pero no tendremos rapidez. Y hace falta cierto grado de rapidez. Por eso, porque se desea cierta rapidez al resolver, es que mecanizamos el procedimiento. Pero esa mecanización no debe hacer que el niño pierda de vista la significación. Es responsabilidad del maestro de aritmética recalcar esa significación y exigirle al niño que no olvide los dos distintos significados de la división de fracciones.

Ahora bien, existen otras maneras de explicar el porqué, en ejercicios de división de fracciones comunes, se invierte el divisor y se multiplica por ese nuevo número . . . Una de esas otras maneras de explicar esto hace uso de la ley de compensación para división. Dice esta ley que si multiplicamos ambos, dividendo y divisor (en un ejercicio de división), por la misma cantidad, el resultado no se altera.

Ésta es también la ley que se aplica para la división de decimales.

Ejemplos con números enteros:

Si $8 \div 2 = 4$, entonces: $(8 \times 5) \div (2 \times 5)$ también es 4.

Veamos: $(40) \div (10) =$ ¿? ¡4!

Si $25 \div 5 = 5$, entonces: $(25 \times 4) \div (5 \times 4)$ también es 5.

Veamos: $(100) \div (20) =$ ¿? ¡5!

Ejemplos con fracciones comunes:

Si $12 \div \frac{3}{4} = 16$, entonces: $(12 \times \frac{4}{3}) \div (\frac{3}{4} \times \frac{4}{3})$ también es 16.

Veamos: $(16) \div (1) =$ ¿? ¡16!

Si $4 \div \frac{1}{2} = 8$, entonces: $(4 \times \frac{2}{1}) \div (\frac{1}{2} \times \frac{2}{1}) = 8$.

Veamos: $(4 \times 2) \div (1) = 4 \times 2 =$ ¿ ? ¡8!

Ejemplos con decimales:

1. ¿Cuánto es $(8 \div .2)$? Aplicando esta ley de compensación, $(8 \div .2) = (8 \times 10) \div (.2 \times 10) = (80) \div (2) = 40$.

Por lo tanto podemos observar que: $8 \div .2$ común y corrientemente se convierte en $80 \div 2$ y éste es el problema que resolvemos, ya que estamos convencidos de que su resultado es igual que el resultado del problema original.

2. ¿Cuánto es $(3.6 \div .04)$? ¿Aplicando esta ley de compensación, $(3.6 \div .04) = (3.6 \times 100) \div (.04 \times 100)$

$$= (360) \div (4)$$
$$= 90.$$

¡Cuántos símbolos, cuánta mecanización, cuántos argumentos y significados deben conocerse! El niño se sentirá confundido si sus maestros no trabajan *sistemática y gradualmente* exigiéndole que vaya comprendiendo ideas y practicándolas con significación y mecanización! Es necesario que la maestra le enseñe los significados de los símbolos y procesos aritméticos. ¿Cómo es posible pretender que el niño aplique conceptos que no entiende, i. e.: que los ha aprendido sólo mediante mecanización? *Es más:* ¡Este artículo no se puede leer con rapidez! Hay que leerlo lentamente, captando su significado correcto.

Cuando el niño pueda también hacer esto y derive satisfacción del convencimiento y uso de estos conceptos, cuando se sienta "en confianza" con éstas y otras ideas, entonces él mismo nos dirá lo mucho que le gusta la aritmética.