Diálogos, 93 (2012) | pp. 301-314

LA CONCORDANCIA SEMIÓTICA COMO CRITERIO PARA LA INTERPRETACIÓN DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA: ALGUNOS EJEMPLOS*

OMAR HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ
JORGE M. LÓPEZ FERNÁNDEZ

I. Introducción

Dicho escuetamente, la semiótica es el estudio de los signos. Ferdinand de Saussure (1974) explica que la *Semiología*[1] sirve para enseñarnos en qué consisten los signos y cuáles son las leyes que los rigen. Para Saussure, la lingüística constituye sólo una parte de la nueva ciencia de la semiología, de manera que las leyes generales de la segunda aplican por inclusión a la primera. Un signo lingüístico parea un concepto con su imagen acústica y ambas coexisten y evolucionan (de manera dependiente o independiente) en la mente humana a través del tiempo. De la misma manera se ha pensado que la matemática parea conceptos con los signos que se emplean para su representación y que estos también pueden evolucionar vinculados o no unos a los otros. Los signos son productos de la sociedad y en este sentido no están sujetos a la voluntad del usuario. En la dualidad idealista propuesta por Saussure el objeto que se significa (concepto) mediante el objeto significador (la imagen acústica) evolucionan de maneras, como hemos dicho, vinculada, o en ocasiones divergen uno del otro con el pasar del tiempo. En la semiótica es imprescindible distinguir entre las relaciones que guardan el objeto significado con el objeto significador a medida que ambos se desarrollan a lo largo

* La investigación histórica que sirve de base para el presente artículo se originó a raíz de conversaciones con Álvaro López Fernández sobre temas que incluyeron la discusión de los fundamentos filosóficos de la semiótica. Su mente inquisitiva y creadora sembró el germen que gestó esta investigación.

[1] Nombre inicialmente dado por Saussure a la ciencia de la *lingüística general* hoy conocida como *semiótica*.

del tiempo. En una época dada, es decir, fija en el tiempo, los signos y los conceptos representados por éstos guardan una relación que no tiene porqué conservarse a medida que transcurre el tiempo. Saussure da varios ejemplos de como pueden transformarse los elementos del binomio concepto/signo y menciona dos tipos de errores que se pueden cometer al interpretar la historia de la evolución entre símbolos y conceptos. Uno de los errores consiste en interpretar que el vínculo entre concepto y signo en nuestro momento actual ha supuesto una evolución conjunta de ambos, la cual ha transformado el vínculo original hasta llevarlo a lo que es en el presente. El otro error es, en efecto, el peor que puede cometer un lingüista, a saber, el error del anacronismo. Consiste en suponer que en sincronías anteriores concepto y signo guardan la misma relación que guardan en el momento presente.

El dualismo semiótico entre signo y concepto en la matemática es muy útil para la interpretación de la evolución de la historia de esta disciplina ya que reviste, curiosamente, una cierta importancia en su docencia, siendo que delata relaciones semióticas propias de nuestra época que no existieron en épocas anteriores. En particular, es de esperar que tal dificultad se exacerbe si la didáctica se nutre de ideas que se han desarrollado en tiempos posteriores, a veces varios siglos después del desarrollo inicial de un concepto matemático en específico. En este artículo se presentan dos ejemplos de las investigaciones históricas realizadas por los autores. La primera se refiere a la regla para la diferenciación de funciones compuestas, conocida en el folklore matemático local como la *regla de la cadena* y la segunda se refiere al *primer teorema fundamental del cálculo*. En ambos casos el estudio semiótico delata anacronismos en la interpretación histórica del desarrollo del concepto y su grafía. El descubrimiento de ambos anacronismos da pie al desarrollo de propuestas didácticas significativas en la enseñanza de estos temas matemáticos.

II.1 La historia de la regla de la cadena

El primer texto de cálculo jamás publicado, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. fue escrito por Guillaume François Antoine L'Hospital, un acaudalado ciudadano francés quien ostentaba varios títulos de nobleza, como el de Marqués de San Mesme. L'Hospital aprendió el cálculo de del matemático suizo Johann Bernoulli, quien fue su tutor y con quien acordó un curioso arreglo financiero mediante el cual por una mesada acordada de antemano, L'Hospital sería el dueño intelectual de toda la creación matemática de Bernoulli. En efecto, L'Hospital se conoce en la literatura matemática primordialmente por la famosa regla que lleva su nombre, la cual, hoy se sabe, fue descubierta y demostrada por Bernoulli. (Dunham, 2005) relata que en las postrimerías de su vida, un Bernoulli amargado acusó a L'Hospital de "haberse lucrado del talento de otros". Sin embargo, L'Hospital da crédito inequívoco a Leibniz y a los hermanos Bernoulli, refiriéndose específicamente a Johann como el "joven profesor de la Universidad de Gotinga" y puntualizando que en su escrito "se han empleado libremente" los resultados matemáticos de ellos.

Es curioso que *Analyse des infiniment petits* no contiene nada referente al cálculo integral. L'Hospital (1696) manifiesta que se inhibió de escribir una exposición de esta parte del cálculo en deferencia Leibniz, quien le había escrito una carta expresando su intención de confeccionar un tratado que llevaría el título "De la ciencia infinita", en el cual se discutiría "el método inverso de las tangentes aplicado a la rectificación de curvas, la determinación de las cuadraturas de los espacios que ellas encierran, la investigación de las superficies de los cuerpos que ellas describen, la determinación de las dimensiones[2] de tales cuerpos, el descubrimiento de sus centros de gravedad, etc." Finalmente, es interesante notar que L'Hospital abona a la agria disputa entre Leibniz y Newton respecto a la invención del cálculo (Hall, 1980) al manifestar, de paso, que "Newton también descubrió algo parecido al cálculo diferencial" en su excelente *Principia*. L'Hospital no desaprovecha la coyuntura para manifestar que la notación de Leibniz "es mucho más fácil y expedita" que la de Newton.

II.2 La versión moderna de la regla de la cadena

De acuerdo al folklore matemático moderno la regla de la cadena es un algoritmo para hallar la derivada de una función compuesta es decir, de una función que se forma mediante la composición de dos funciones, las cuales deben satisfacer ciertas condiciones relacionadas a la existencia de sus derivadas (las cuáles haremos explícitas más adelante). Si f y g son funciones tal que el codominio de g está contenido en el dominio de f y si para algún elemento $x \in \operatorname{dom} g$ g es diferenciable en x y f es diferenciable en $g(x)$, entonces la composición $f \circ g$ es diferenciable en x y, además,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \quad (0.1)$$

Esta es una fórmula sofisticada y llena de sutilezas. El mero hecho de ser capaz de leer correctamente la ecuación (0.1) es indicativo, por sí solo, de un alto nivel de conocimiento matemático. Por ejemplo, en la fórmula aparecen las expresiones $(f \circ g)'(x)$, $f'(g(x))$ y $g'(x)$, las cuales representan en notación ma-

[2] Se refiere a sus volúmenes.

temática moderna, respectivamente, el valor de la derivada de la función compuesta $f \circ g$ en el punto x, el valor de la derivada de la función f en el punto $g(x)$ y el valor de la derivada de g en el punto x. Claro está, lo más impresionante de la fórmula es precisamente la relación que queda de manifiesto en (0.1). La definición de derivada para funciones entre espacios euclídeos multidimensionales así como el algoritmo que permite el cálculo de la derivada de la composición de dos de tales funciones, son elementos de reciente desarrollo en el marco histórico del análisis, y no es exagerado aseverar que ello no hubiese sido posible si no se hubiese planteado primero la regla de la cadena para funciones de una variable en el sofisticado discurso matemático que es necesario desarrollar para dar sentido a la relación (0.1). Sin embargo, es en *Analyse des infiniment petits* donde se enuncia por primera vez la regla de la cadena. Por ello surge naturalmente la interrogante respecto al contenido semántico de la regla de la cadena en la famosa publicación, siendo el caso que durante la segunda mitad del siglo XVII no se había inventado la noción de *función* y mucho menos la "operación" de *composición* de funciones. La dilucidación de este enigma tiene interesantes repercusiones didácticas, siendo que el supuesto tácito de los docentes de la matemática quienes dan por descontado que la semántica del enunciado de L'Hospital es la misma que la del enunciado moderno de la regla de la cadena constituye un craso error de anacronismo en el sentido de Saussure. Ciertamente, es históricamente imposible que la dualidad implícita entre la grafía de la regla de la cadena en *Analyse des infiniment petits* y los conceptos matemáticos que se denotan mediante tal grafía sea la misma que la dualidad homóloga entre conceptos y grafía de la versión actual de la misma regla. Veamos algunos detalles.

II.3 La regla de la cadena según planteada en *Analyse des infiniment petits*: los infinitésimos

Se debe señalar, en primer lugar que la noción moderna de "derivada" para una función de una variable real en *Analyse des infiniment petits* corresponde a lo que L'Hospital llama una "diferencia". En el lenguaje de los infinitésimos y la grafía actual de la matemática, la diferencia de una función f en un punto x corresponde a la expresión $f(x+dx)-f(x)$, en la que dx representa un *infinitésimo*,[3] es decir, un "número" dx tal que $|dx|< r$ para todo número real positivo r. Esta diferencia se suele escribir como dy y el supuesto que sirve de trasfondo al cálcu-

[3] La axiomática estándar de los números reales sólo permiten la existencia de un solo infinitésimo, a saber, el cero. Sin embargo, en la formulación de los números hiperreales de Robinson (1966) es posible tener infinitésimos distintos de cero.

lo es que tal diferencia corresponde a un número real, el cual escribiríamos hoy como $f'(x)$, es decir, como el valor de la derivada en el punto x.

El asunto de la existencia de los infinitésimos es uno caracterizado por notorios argumentos esgrimidos por el obispo George Berkeley en su famoso escrito *The Analyst* (Berkeley, 1992), dedicado a un "matemático infiel", que hoy se supone que haya sido su contemporáneo Edmund Halley. La crítica primordial de Berkeley sobre el empleo de infinitésimos en argumentos matemáticos se centraba en la práctica de la época de suponerlos distintos de cero mientras conviniese, pero al fin, tomándolos como cantidades nulas, es decir, cantidades que valen cero. Es justo decir que los iniciadores del cálculo,[4] siendo matemáticos de agudo discernimiento, nunca permitieron que las críticas de Berkeley detuvieran su afanoso esfuerzo por descubrir nuevos resultados empleando las técnicas del recién inaugurado cálculo.

De acuerdo a Kitcher (1984, p. 231) los matemáticos de la primera mitad del siglo XVII heredaron ciertos problemas matemáticos de gran significación y, aunque fueron capaces de resolver una cantidad muy modesta, primordialmente en casos aislados o especiales, no pudieron dar con una técnica general que llevara a la solución sistemática de todos los problemas. Con el advenimiento del cálculo inaugurado por Newton y Leibniz hubo una actividad inusitada en la creación matemática, la cual llevó a un desarrollo sin precedentes que culminó en la resolución de un cúmulo de problemas pendientes desde la antigüedad y en la creación de un voluminoso cuerpo de conocimiento matemático que superaba con creces toda la obra matemática anterior de la humanidad. No se exagera cuando se dice que esta nueva disciplina conformó los intereses y la práctica de la matemática actual. Sin duda, es posible ver en esta explosión intelectual sin precedentes, implícita en la creación del cálculo, los orígenes de los tipos de preguntas que se hacen los matemáticos de hoy, los tipos de razonamiento que esgrimen entre ellos y la naturaleza general de su discurso (Kitcher, 1984, p. 229). Más aún, se puede señalar a lo que pudiésemos llamar la ventaja cognitiva de los infinitésimos en los argumentos del cálculo, como el instrumento que llevó al descubrimiento de la abrumadora mayoría de los resultados característicos de esta disciplina, resultados que aún se discuten en nuestras aulas universitarias. Toda esta actividad es el producto directo del empleo del "método de los infinitésimos" en los argumentos del cálculo.

---

[4] Newton, Leibniz, L'Hospital, Gregory, Barrow y Euler, entre otros.

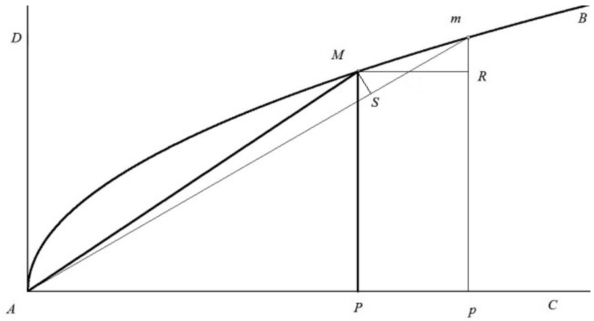


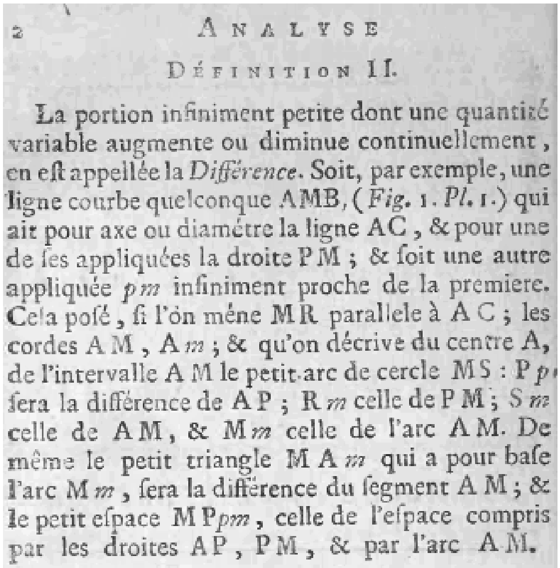
Figura 1: Ilustración de la diferencias en el escrito de L'Hospital

L'Hospital (1696, p. 2) presenta en la Definición II su acepción de la *diferencia* de una "variable". Dice que la diferencia es la porción infinitamente pequeña por la que aumenta o disminuye una cantidad. Es importante resaltar que en lugar de funciones, L'Hospital habla de "variables" y distingue entre ellas dos tipos, a saber, las dependientes y las independientes. La Definición II de *Analyse des infiniment petits* está acompañada de una figura, la cual se numera como la Figura 1 del escrito de L'Hospital y se incluye en este ensayo con el mismo número. En la figura se puede observar que L'Hospital denota por P a una abscisa arbitraria (eje horizontal, x) y a p como un incremento infinitésimo de tal abscisa (dx). De acuerdo a su Definición II, por ejemplo, pm es una ordenada infinitamente cercana a PM (y) y la Rm (dy) es la diferencia de la variable(y). De forma similar L'Hospital ilustra otras diferencias, entre las que se incluyen la longitud de arco y área (Figura 2) .

El cálculo de diferencias se da de manera muy natural en este tipo de discurso matemático. Por ejemplo, si queremos determinar la diferencia del producto de las variables u y v, ambas dependientes de la variable x, entonces a un cambio infinitésimo en x correspondería el cambio de $(u+du)(v+dv) = uv + udv + vdu + dudv$ de donde se concluye que el cambio correspondiente al producto, es decir, $(u+du)(v+dv) - uv$ esta dado por $udv + vdu + dudv$. L'Hospital argumenta entonces que el infinitésimo $dudv$ es infinitamente más pequeño que cada uno de udv y vdu y, por tanto, se puede descartar (precisamente la crítica de Berkeley). Esto muestra que $d(uv) = udv + vdu$, lo cual escribiríamos hoy, empleando la notación de Leibniz, como

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Esta ultima expresión es correcta en el marco del análisis no estándar de Robinson (1966) pudiéndose interpretar como fracciones si el infinitésimo del denominador (dx) es distinto de cero.



2 ANALYSE

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en eſt appellée la *Différence*. Soit, par exemple, une ligne courbe quelconque AMB, (*Fig.* 1. *Pl.* 1.) qui ait pour axe ou diamétre la ligne AC, & pour une de ſes appliquées la droite PM; & ſoit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela poſé, ſi l'ôn méne MR parallele à AC; les cordes AM, A*m*; & qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS: P*p* ſera la différence de AP; R*m* celle de PM; S*m* celle de AM, & M*m* celle de l'arc AM. De même le petit triangle MA*m* qui a pour baſe l'arc M*m*, ſera la différence du ſegment AM; & le petit eſpace MP*pm*, celle de l'eſpace compris par les droites AP, PM, & par l'arc AM.

Figura 2: Definición de “diferencia”; lo más cercano que estuvo L’Hospital de dar la definición moderna de derivada.

La regla de la cadena en *Analyse des infiniment petits* aparece por primera vez en la discusión del problema de hallar la diferencia de una potencia “perfecta o imperfecta”.[5] L’Hospital demuestra la regla usual $dx^r = rx^{r-1}dx$ donde r es un exponente racional cualquiera. Es curioso, sin embargo, que el primer ejemplo de la aplicación de la regla de las potencias es el cálculo de la diferencia de $\left(ay - x^3\right)^3$; véase (L’Hospital, 1696, p. 9). Claramente para completar este cálculo es menester emplear la regla de la cadena. Sin embargo L’Hospital completa el cálculo del ejemplo con la mayor naturalidad sin comentar que en este caso se trata de un algoritmo que rebasa el mero empleo de la regla de las potencias. Este hecho abona a la evidencia que muestra que la regla de la cadena es un asunto trivial en el lenguaje de los infinitésimos y las diferencias. En efecto, hay muy poco que decir sobre este asunto en el discurso que rige la exposición de *Analyse*

[5] Entiéndase entera o racional.

des infiniment petits. Si u es una variable que depende de la variable (independiente) x y y depende a su vez de u entonces, a posteriori, y depende de la variable x de manera que el símbolo dy es, en principio, ambiguo ya que no se sabe de antemano si se trata de una diferencia respecto a x o respecto a u. Sin embargo, entendiendo que y está dada como una variable que depende de u tenemos (en lenguaje parcialmente moderno), luego de expresar las relaciones explícitamente en lenguaje funcional como $y = f(u)$ y $u = g(x)$, que $dy = f'(u)du$. Sin embargo, como u depende de x, vemos a su vez que $du = g'(x)dx$ de manera que $dy = f'(u)g'(x)dx = f'(g(x))g'(x)dx$ lo cual corresponde a la regla de la cadena según la conocemos. En el caso del ejemplo de L'Hospital podríamos plantear $y = u^3$ y $u = ay - x^3$, de suerte que $dy = 3u^2du = 3u^2(ady - 3x^2dx) = 3(ay - x^3)^3(ady - 3x^3dx)$.

Es notable que la regla de la cadena no aparece demostrada o justificada en lo más mínimo en todo el tratado de *Analyse des infiniment petits* y tampoco en ninguno de los tres libros de análisis de Euler (1748 Vols. 1 y 2; 1755). La evidencia muestra que la regla de la cadena durante la segunda mitad del siglo XVII no era ni más ni menos que un algoritmo para diferenciar expresiones que se obtenían de otras expresiones diferenciables luego de efectuar sustituciones, también diferenciables. La evidencia apunta a que esta circunstancia posiblemente sea la responsable de la notoria dificultad que experimentan los estudiantes de cálculo cuando estudian este algoritmo. Curiosamente, la evidencia acumulada (Santiago, 2008) parece indicar que la dificultad que experimentan los estudiantes es más bien con la noción de composición que con la habilidad para aplicar la regla misma. Cuando la regla se presenta como un algoritmo para diferenciar expresiones obtenidas mediante la sustitución de variables diferenciables en otras expresiones diferenciables, entonces las dificultades observadas parecen disminuir significativamente (Santiago, 2008). La explicación de este dato es sin duda un reto para las teorías de la didáctica de las matemáticas. Sin embargo, no podemos ignorar el hecho histórico que registra en el siglo XVII la primera vez que se enuncia la versión moderna de la regla de la cadena con la discusión correspondiente de la composición de funciones; véase (Lagrange, 1797) y más tarde en (Cauchy, 1899), es decir más de un siglo después de la publicación de *Analyse des infiniment petits*. Ciertamente durante este período se observan transformaciones importantes en el pensamiento matemático que llevan a la depuración de la regla expuesta por L'Hospital en términos mucho más sofisticados en lo que concierne a su dimensión cognitiva.

III. El desarrollo de la integral durante la segunda mitad del siglo XVII

El ejemplo que sigue muestra, a nuestro juicio, la gran desfase que puede existir entre la pedagogía de la matemática y el desarrollo histórico de las ideas centrales de esta disciplina. Si tomamos la historia de la matemática como indicativa del esfuerzo que experimenta la mente humana en su afán por organizar el conocimiento matemático y comprender las ideas y conceptos centrales de esta disciplina de estudio, entonces debemos admitir que algunos temas del currículo parecen tener muy poca relación con la realidad histórica del desarrollo de la matemática. Esto no significa que los autores de este escrito estemos abogando necesariamente por un estudio de la matemática fundamentado en su desarrollo histórico. En efecto, con frecuencia, en el estudio de las matemáticas avanzadas que sigue el desarrollo histórico de la disciplina puede ser uno muy ineficiente y falto de conexiones con áreas de interés moderno. Sin embargo, en los cursos medulares en los que grandes números de estudiantes aspiran a comprender los elementos de una disciplina (como el cálculo), la presentación acorde con el desarrollo histórico es una que podría mejorar significativamente la comprensión de la disciplina. La didáctica del *teorema fundamental del cálculo* es una que se podría beneficiar mucho de esta metodología (si así se pudiese llamar) de la enseñanza matemática. En ánimo de explicar nuestra postura respecto a la didáctica del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) examinamos algunos particulares.

Recientemente, el presidente saliente de la organización profesional *Mathematical Association of America*, David Bressoud, manifestó:

> Existe un problema fundamental con el enunciado de este teorema fundamental: pocos estudiantes lo comprenden. La interpretación común es que integración y diferenciación son procesos inversos. Esta parecería ser una aseveración correcta tal y como se enuncia. Sin embargo, el problema es que la integral definida se define como un límite de sumas de Riemann. Para la mayoría de los alumnos la definición práctica de la integral definida es una que lo tiene como una diferencia de dos valores de "la" antiderivada. Cuando esta interpretación del teorema se combina con la definición común de la integral, el teorema cesa de tener significación alguna (Bressoud, 2011, p. 99; traducción de los autores).

Esta aseveración resulta curiosa por varias razones. En primer lugar, si se estudia el desarrollo de la integral durante la segunda mitad del siglo XVII en los escritos de Barrow, Newton y Leibniz, se constata la ausencia total de pasaje alguno que parezca aseverar que la integral sea algún tipo de límite de las sumas que hoy llamamos "de Riemann". En efecto, si se examinan las demostraciones del teorema fundamental del cálculo de Barrow (Child, 1916, p. 113), Newton (Guichardini, 2009, p. 205) y Leibniz (Laubenbacher, and Pengelley, 1999, p. 133), se podrá constatar que en ninguna de ellas aparece idea alguna que sustente la noción de la integral como una aproximación de sumas de Riemann. ¿De dónde proviene entonces la referencia a las "sumas de Riemann"? Aparentemente, las sumas que hoy llevan el nombre de Riemann fueron inventadas por él en conexión con un trabajo matemático que nada tenía que ver con la definición de la integral.

La definición de la integral como una aproximación de sumas de Riemann hace su aparición en la literatura matemática en (Cauchy, 1899, p. 125), casi dos siglos después de la publicación de *Analyse des infiniment petits*. Se puede ver que este es un ejemplo más del error de anacronismo mencionado por Saussure, el cual supone relaciones entre la grafía y los conceptos de la matemática, válidas hoy pero inexistentes en segunda mitad del siglo XVIII. La definición de la integral como sumas de Riemann ocurre con posterioridad a las demostraciones del teorema fundamental del cálculo de Newton, Leibniz y Barrow.

En aras de focalizar esta la discusión que sigue sobre el TFC, enunciamos las versiones modernas de sus dos partes:

Teorema (TFC1) Si $f:[a,b]\to \mathsf{R}$ es una función continua, entonces, para todo $x\in[a,b]$,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x)$$
.

Teorema (TFC2) Si $F:[a,b]\to \mathsf{R}$ es una antiderivada de la función continua $f:[a,b]\to \mathsf{R}$ (es decir, si F es continua en $[a,b]$ y $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in(a,b)$), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$
.

Las únicas propiedades de la integral que emplearon Newton, Leibniz y Barrow en sus demostraciones del teorema fundamental del cálculo son las que hoy día se escribirían en lenguaje funcional de la manera que presentamos a continuación. En lo que sigue suponemos que $f:[a,b]\to \mathsf{R}$ es una función continua, y que u, v y w son números reales tal que $-\infty < a \le u < v < w \le b < \infty$ y que para todo par de números $u < v$ según indicados, existe un número real $I_u^v(f)$ tal que

I. $I_u^w(f) = I_u^v(f) + I_v^w(f)$, y

II. $(v-u)\min\limits_{x\in[u,v]} f(x) \le I_u^v(f) \le (v-u)\max\limits_{x\in[u,v]} f(x)$.

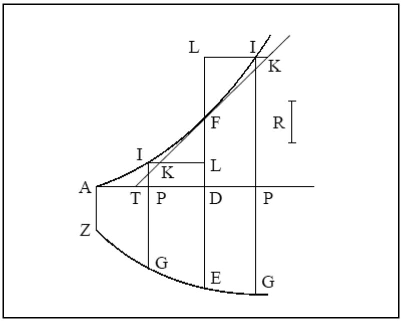


Figura 3. Gráfica empleada por Isaac Barrow en su demostración del TFC

La primera propiedad de la integral (I.) es la que se denomina como la propiedad de "aditividad". Ciertamente esta es una propiedad necesaria en cualquier planteamiento teórico de la integral definida, y una que emplearon todos los iniciadores del cálculo a quienes se les atribuye demostraciones del TFC. La segunda propiedad (II.) dice que la integral, la cual, como sabemos, representa el área debajo de una "curva" y entre dos límites u y v, tiene un valor que se ubica entre el del área del rectángulo inscrito y la del rectángulo circunscrito. En la Figura 3. empleada por Barrow en la demostración del TFC, se emplea precisamente esta propiedad. Lo interesante es que de estas dos propiedades se puede demostrar de inmediato el TFC. En efecto, la versión moderna del argumento de Newton es la siguiente. Argumenta Newton que si $dx > 0$ es un infinitésimo, entonces el incremento en el área debajo de la curva estaría dado por

$$I_x^{x+dx}(f).$$

Newton indica que esta área es igual al área de algún rectángulo "intermedio", digamos hdx, donde h es alguna ordenada infinitamente cercana a $f(x)$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{dx} I_x^{x+dx}(f) = h,$$

está infinitamente cerca de $f(x)$ y por ello se puede "sustituir" por la abscisa $f(x)$. Este es el argumento, adaptado al lenguaje matemático moderno y tomado de (Guichardini, N., 2009, p. 205). Es menester decir que el argumento empleado, el cual hace uso de infinitésimos puede justificarse formalmente empleando los principios del análisis no estándar; véase (Robinson, A., 1966). Sirva decir que el argumento de Newton ha sobrevivido los estragos del tiempo y sigue, aún hoy día, siendo válido cuando se escribe siguiendo el discurso matemático del análisis no estándar.

En esta presentación alterna a la "oficial" de nuestro currículo universitario la versión del TFC2 se podría demostrar empleando el siguiente resultado.

Proposición Si F es una antiderivada de f en $[a,b]$ y $a \le u < v \le b$ entonces

$$(v-u)\min_{x\in[u,v]} f(x) \le F(v) - F(u) \le (v-u)\min_{x\in[u,v]} f(x).$$

La demostración de este resultado, que lleva el nombre de *desigualdad de la media*, se puede encontrar, por ejemplo, en (Körner, 2003, p. 18) . Esto dice, en efecto, que la correspondencia $(u,v) \mapsto F(v) - F(u)$ es una integral, e implica los resultados usualmente asociados la teorema de la media, en particular que una función cuya derivada es cero en todo un intervalo abierto es constante. En particular la integral se puede demostrar única y de aquí se obtiene directamente TFC2.

Como se puede apreciar, este desarrollo no emplea sumas de Riemann y produce todos los resultados clásicos asociados a la integral elemental, incluyendo sus aplicaciones.

IV. Conclusiones

La historia de la matemática da muestras del hilo cognitivo que delata el esfuerzo mental implícito en el desarrollo de las ideas centrales del cálculo, específicamente la regla de la diferenciación de funciones compuestas y el teorema fundamental del cálculo. El ignorar esta realidad histórica lleva a graves vicios en la didáctica de la matemática que en nada promueven la comprensión de las ideas del cálculo y la interdependencia de unas con respecto de las otras. La concordancia semiótica entre signos y significados puede servir para delatar tales vicios como se muestra en el estudio del desarrollo histórico del cálculo durante la segunda mitad del siglo XVII.

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

REFERENCIAS BILIOGRÁFICAS

Berkeley, G. (1992). *De Motu and The Analyst: A Modern Edition with Introductions and Commentary*. D. Jesseph (trans. and ed.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflexions on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *American Mathematical Monthly*, *118* (9), 99-115.

Cauchy, A. L. (1899). *Résumé des Leçons Données a L' Ecole Royale Polytechnique sur Le Calcul Infinitesimal*, Série II, Tome IV, Œvres Complétes.

Child, J. M. (1916). *The geometrical lectures of Isaac Barrow, translated with notes and proofs, and a discussion on the advance made therein on the work of his predecessors in the infinitesimal calculus. (No. 3)*. Chicago, IL: Open Court.

Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery. Masterpieces from Newton to Lebesgue.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum Vol 1 (Introducción al análisis del infinito* Vol 1, Edición Facsimilar, Sevilla: SAEM Thales-Real Sociedad Matemática Española.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum Vol 2* (*Introduction to the Analysis of the Infinite, Book II*). 1990, New York: Springer Verlag.

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi diferentialis. (Foundations of Differential Calculus).* 2000, New York: Springer Verlag.

Guicciardini, N. (2009). *Isaac Newton on mathematical certainty and method.* Cambridge, MA: The MIT Press.

Hall, A. R. (1980). *Philosophers at War: The quarrel between Newton and Gottfried Leibniz.* Cambridge, MA: University Press.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of mathematical knowledge.* New York, NY: Oxford University Press.

Körner, T. W. (2003). *A Companion to Analysis: A Second First and First Second Course in Analysis*. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society.

L'Hospital, G. F. A. (1696). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes.* Paris, France: LÍmprimerie Royale.

Lagrange, J. L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques*. Paris : L'Imprimerie de la république.

Laubenbacher, R., & Pengelley, D. (1999). Mathematical expeditions, chronicles by the explorers. New York: Springer Verlag.

Newton, I. (1686). *Mathematical Principles of Natural Philosophy and System of the World*, Vols 1 y 2 (Traducción de Andrew Motte, 1729). Berkeley, CA: University of California.

Robinson, A. (1966). *Non-standard analysis*, Amsterdam, The Netherlands: North-Holland Publishing Co.

Santiago, C. I. (2008). *Los números hiperreales y la comprensión del concepto de derivada de una función en el curso de cálculo*. Disertación doctoral, Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Río Piedras, PR.

Saussure, F. (1974). *Cours de Linguistique Générale.* C. Bailly and Albert Séchehaye (eds.) with the collaboration of A. Riedlinger. Paris: Payot.