Revista Electrónica · e-ISSN 2150-6515
CIDE digital

Programa Graduado en Demografía • Maestría en Ciencias en Demografía

Tasas de crecimiento poblacional (r): Una mirada desde el modelo matemático lineal, geométrico y exponencial[1]

Arnaldo Torres-Degró, Ph.D.[2]

Forma de citar: Torres-Degró, A. (2011). Tasas de crecimiento poblacional (*r*): Una mirada desde el modelo lineal, geométrico y exponencial. *CIDE digital*, *2*(1), 143-162.

Resumen: **Trasfondo/Objetivo.** *La tasa de crecimiento poblacional puede ser estimada suponiendo que este crecimiento sigue cierto patrón preestablecido. Los análisis más utilizados en demografía parten del supuesto que la población sigue cierto modelo matemático. El propósito de este trabajo es recopilar dichos algoritmos de tal manera que puedan ser utilizados para facilitar el análisis de la tasa de crecimiento.* **Métodos.** *Utilizando los resultados de los censos 1990 y 2000 se calcula el crecimiento poblacional entre ambos censos utilizando el modelo matemático lineal, geométrico y exponencial.*

Palabras claves: Modelos matemáticos demográficos, Población base, tasa de crecimiento, Censo, Puerto Rico.

Introducción

El interés fundamental de la demografía se concentra en El estado y La dinámica de la población en el tiempo. Uno de los objetivo de la demografía esta dada precisamente en estudiar los movimientos que se presentan en las poblaciones humanas. Dicho movimiento esta en función de los tres componentes que provocan cambios en el estado a lo largo del tiempo: nacimientos, defunciones y migración. Es decir, a medida que las personas nacen, mueren o se mueven, los números totales de habitantes en un área cambian. Es por tal razón que reiteramos que en cierto período de tiempo, el tamaño de una población puede crecer, mantenerse constante o disminuir, dependiendo del efecto que estén ejerciendo estos determinantes o componentes de cambio.

[1] Trabajo técnico demográfico elaborado por el Centro de Investigaciones Demográficas de Puerto Rico (CIDE).
[2] Catedrático Asociado del Programa Graduado en Ciencias en Demografía; Coordinador del Centro de Investigación Demográfico (CIDE), Recinto de Ciencias Médicas de la Universidad de Puerto Rico. Email: arnaldo.torres1@upr.edu

Dichos componentes (nacimiento, defunciones y migración) crean dos procesos dentro de la dinámica de una población que son objeto de análisis. El primer proceso introduce nuevos elementos a la población donde intervienen la fecundidad o natalidad y la inmigración, se les conoce como proceso de entrada. El segundo proceso excluye individuos de la población donde intervienen la mortalidad y la emigración, se les conoce como proceso de salida. Las relaciones entre estos dos procesos es la que provoca que el tamaño de la población esté expuesto a cambiar continuamente.

Sin embargo, una tasa de crecimiento poblacional puede ser estimada suponiendo que este crecimiento sigue cierto patrón preestablecido. Los análisis más utilizados en demografía parten del supuesto que la población sigue cierto modelo matemático, y el procedimiento consiste en estimar la relación funcional que lo explica. Generalmente se consideran tres modelos básicos: Aritmético, geométrico y exponencial. Antes de desarrollar las tasas de crecimientos desde la óptica de los modelos matemáticos es conveniente entender el concepto de la amplitud (a).

Amplitud (a)

La amplitud (a) se refiere a la distancia en tiempo entre los dos puntos de referencia, entiéndase P^t y P^{t+n} respectivamente. La misma se obtiene buscando la diferencia entre las dos fecha.

$$a^{mes} = \sum mes \div 12 \tag{1}$$

$$a^{dia} = \sum dias \div 365 \tag{2}$$

¿Cómo podemos trasformar la amplitud en un valor numérico? ¿Cómo podemos calcular la amplitud entre dos tiempos? Si cada año representa una unidad 1,2,3…10 entones ¿cuanto representa un mes o un día dentro de cada unidad? Si una unidad representa un año y cada año tiene 12 meses, utilizando la ecuación (1) podemos demostrar que un mes representa .08333.

$$a^{1mes} = 1 \div 12$$
$$a^{1mes} = .08333\bar{3}$$

Por otro lado, si una unidad representa un año y cada año tiene 365 días (excepto el año bisiesto que ocurre cada cuatro años con 366 días), utilizando la ecuación (2) podemos demostrar que un día representa .0027397.

$$a^{1día} = 1 \div 365$$
$$a^{1día} = .0027397$$

Para poder entender la mecánica de la amplitud (*a*) tomemos el siguiente ejemplo: si se desea estimar la población (P^t) entre el 1ro de abril del 2000 (P^t) al 1ro de julio (población a mitad de año) del 2000 (P^{t+n}), lo primero que se debe resolver es la amplitud (*a*) que media entre esos dos puntos de interés. Para calcular la amplitud podría resolverse de dos maneras. Primero: si utilizamos el mes como punto de referencia para calcular la amplitud entre P^t y P^{t+n} podríamos indicar que entre el 1ro de abril al 1ro de julio hay exactamente una distancia de 3 meses (abril, mayo y junio). Para calcular la amplitud de dicha distancia podríamos multiplicar la cantidad de meses por el factor .083333, es decir:

$$a = f^{mes} \times a^{1mes}$$
$$a = 3 \times .08333\bar{3}$$
$$a = .24999$$
$$a \approx .25$$

Además, la amplitud puede calcularse dividiendo la cantidad de meses en la amplitud entre 12 meses, es decir:

$$a = f^{mes} \div 12^{meses}$$
$$a = 3 \div 12$$
$$a = .25$$

La amplitud refleja una distancia de .25 entre el periodo de interes (P^t y P^{t+n}).

Segundo, si utilizamos el día como punto de referencia para calcular la amplitud entre P^t y P^{t+n} podríamos indicar que entre el 1ro de abril al 1ro de julio hay exactamente una distancia de 91 días (30 días en abril, 31 días en mayo y 30 días en junio). Para calcular la amplitud de dicha distancia podríamos multiplicar la cantidad de días por el factor .0027397, es decir:

$$
\begin{aligned}
a &= f^{dias} \times a^{1dia} \\
a &= 91^{dias} \times .0027397 \\
a &= .2493127 \\
a &\approx .25
\end{aligned}
$$

Además, la amplitud puede calcularse dividiendo la cantidad de días en la amplitud entre 365 días, es decir:

$$
\begin{aligned}
a &= f^{dias} \div 365^{dias} \\
a &= 91 \div 365 \\
a &= .249315 \\
a &\approx .25
\end{aligned}
$$

La amplitud refleja una distancia de .25 entre el periodo de interes (P^t y P^{t+n}).

Tomemos otro ejemplo, si nuestro interés es calcular la distancia en tiempo entre dos censos, por ejemplo, 1899 y 1910 donde la fecha de referencia del censo del 1899 fue el 10 de noviembre y la del 1910 fue el 15 de abril estaríamos hablando aproximadamente de una amplitud de 10 años. No obstante, la amplitud debe ser lo más certero posible. Nos podemos percatar que entre el 10 de noviembre de 1899 al 10 de noviembre de 1909 se reflejan exactamente una amplitud de 10 años. Entre el 10 de noviembre del 1909 al 15 de abril del 1910 hay unos 156 días (20 días entre el 10 al 30 de noviembre, 31 días en diciembre, 31 días en enero, 28 días en febrero, 31 días en marzo y 15 días abril). Estos 156 días representa una amplitud, conforme los dos métodos, de:

$$a = f^{dias} \times a^{1dia} \qquad \text{ó} \qquad a = f^{dias} \div 365^{dias}$$
$$a = 156^{dias} \times .0027397 \qquad \qquad a = 156 \div 365$$
$$a = .4273932 \qquad \qquad a = .4273973$$
$$a \approx .43 \qquad \qquad a \approx .43$$

Es decir si entre el 10 de noviembre de 1899 al 10 de noviembre de 1909 se reflejan exactamente una amplitud de 10 años y entre el 10 de noviembre de 1909 al 15 de abril de 1910 la amplitud fue de .43 podemos concluir que la amplitud entre los censos del 1899 y 1910 fue de 10.43 años.

Tasa de Crecimiento Aritmético

Arithmetic growth rate (Eng)
Taux de croissance arithmétique (Fra)

También conocido como tasa de crecimiento lineal, es el más simple de todos, supone que la población tiene un comportamiento lineal y por ende, la razón de cambio se supone constante donde se incrementa en la misma cantidad cada unidad de tiempo considerada. Es decir, en el modelo aritmético el supuesto básico consiste en que la población crece en un mismo monto (cantidad) cada unidad de tiempo. Esta tasa solo es aconsejable para períodos cortos de tiempo (menor de dos años). La fórmula para la tasa de crecimiento bajo el supuesto modelo aritmético es:

$$r = \frac{\mathrm{P}^{t+n} - \mathrm{P}^{t}}{a(\mathrm{P}^{t})} \tag{3}$$

$$r = \frac{1}{a}\left(\frac{\mathrm{P}^{t+n} - \mathrm{P}^{t}}{\mathrm{P}^{t}}\right) \tag{4}$$

$$r = \left(\frac{\mathrm{P}^{t+n} - \mathrm{P}^{t}}{a}\right) \div \mathrm{P}^{t} \tag{5}$$

donde

r Tasa de crecimiento anual aritmético.

P^{t+n} Población al momento actual.

P^{t} Población al momento inicial o población base o población inicial.

a La amplitud o distancia en tiempo entre las dos poblaciones de referencia.

Referente a Puerto Rico, si tomando la población según el censo de 1990 con una población al 1ro de abril de 3,522,037 y para el censo de 2000 con una población al 1ro de abril de 3,808,610 podemos bajo el supuesto aritmético desarrollar la tasa de crecimiento. No olvidemos que para la tasa de crecimiento es necesario dos poblaciones de referencia: una población de referencia se le considera como población base o punto de referencia (P^{t}). Muchos lo reconocen como la población más alejada entre los dos puntos o simplemente la menos reciente entre los dos puntos. El otro punto de referencia esta dado por la población más cercana (P^{t+n}). La amplitud o distancia en tiempo entre los dos puntos de referencia esta simbolizada por la letra *a*, donde la misma se obtiene buscando la diferencia entre las dos fechas. Según las fechas de los censos arriba mencionados la amplitud entre uno y el otro censo es de 10 años. Por consiguiente, la tasa de crecimiento lineal o aritmético poblacional para el período 1990-2000 podría calcularse conforme las ecuaciones (3), (4) y (5), veamos:

$$\begin{aligned} r &= \frac{P^{2000} - P^{1990}}{a(P^{1990})} \\ r &= \frac{3808610 - 3522037}{10 \times 3522037} \\ r &= \frac{286573}{35220370} \\ r &= .00813657 \\ r &= .00813657 \times (100) \\ r &= .813657 \approx .81\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{a}\left(\frac{P^{2000} - P^{1990}}{(P^{1990})}\right) \\ r &= \frac{1}{10}\left(\frac{3808610 - 3522037}{3522037}\right) \\ r &= .1(.081365698) \\ r &= .00813657 \\ r &= .00813657 \times (100) \\ r &= .813657 \approx .81\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{P^{2000} - P^{1990}}{a}\right) \div P^{1990} \\ r &= \left(\frac{3808610 - 3522037}{10}\right) \div 3522037 \\ r &= (28657.3) \div 3522037 \\ r &= .00813657 \\ r &= .00813657 \times (100) \\ r &= .813657 \approx .81\% \end{aligned}$$

Independientemente de la ecuación seleccionada el valor obtenido del cálculo de la tasa de crecimiento aritmética (r) es usualmente presentado de forma porcentual. Al calcular el crecimiento poblacional aritmético de Puerto Rico entre el año 1990 y el año 2000 encontramos que la misma fue de .00813657 pero al aplicarle el por ciento decimos que la tasa de crecimiento poblacional aritmética fue de .81 por ciento, siendo este el valor que normalmente es presentado a la consideración de los interesados. Por consiguiente es bien normal escuchar, que en un lugar (Puerto Rico) para el periodo tal (1990 al 2000) la tasa de crecimiento (aritmética) poblacional fue tanto (.81 por ciento) o simplemente (.81). De forma simple y concreto, ¿qué significa dicho resultado?, o más aun, ¿cómo se debe interpretar dicho resultado? La tasa de crecimiento (*r*) obtenida bajo la modalidad lineal o aritmética (*r*=.81 por ciento) se puede interpretar, que entre el periodo del 1990 al 2000 como incremento anual, la población de Puerto Rico aumento .81 personas por cada 100 habitantes. Sin embargo, es recomendable y por supuesto conveniente elevar el decimal a un valor entero para que pueda ser entendido fácilmente. Al multiplicar la tasa de crecimiento (*r*=.00813657) por mil podemos decir que el incremento anual de la población en Puerto Rico para el periodo de 1990 al 2000 fue de 8.1 personas por cada 1000 habitantes. De forma concluyente podemos indicar que la tasa de crecimiento (*r*) poblacional de .81 por ciento nos sugiere que en Puerto Rico entre el 1990 al 2000 el incremento anual poblacional fue de 8.1 personas por cada 1000 habitantes. Observemos en la tabla 3 que en el año 1940 la tasa de crecimiento fue de 2.1 lo que sugiere un incremento de población de 21 personas por cada 1000 habitantes entre el periodo del 1930 al 1940.

Tasa de Crecimiento Geométrico

Geometric growth rate (Eng)
Taux de croissance géométrique (Fra)

También conocido como interés compuesto, esta tasa supone un crecimiento porcentual constante en el tiempo. A diferencia del modelo anterior, dicha tasa mantiene constante el porcentaje de crecimiento por unidad de tiempo y no el monto (cantidad) por unidad de tiempo, por tanto, se puede usar para períodos largos. La fórmula para la tasa de crecimiento poblacional bajo el supuesto geométrico pueden ser varias, veamos:

$$r = \left(\frac{P^{t+n}}{P^{t}} \right)^{1/a} - 1 \qquad (6)$$

$$r = \sqrt[a]{\left(\frac{P^{t+n}}{P^{t}} \right)} - 1 \qquad (7)$$

donde

r Tasa de crecimiento anual geométrico.

P^{t+n} Población al momento actual.

P^{t} Población al momento inicial o población base o población inicial.

a La amplitud o distancia en tiempo entre las dos poblaciones de referencia.

Referente a Puerto Rico, si tomando la población según el censo de 1990 con una población al 1ro de abril de 3,522,037 y la del censo de 2000 con una población al 1ro de abril de 3,808,610 podemos bajo el supuesto geométrico desarrollar la tasa de crecimiento. No olvidemos que para la tasa de crecimiento es necesario dos poblaciones de referencia: una población de referencia se le considera como población base o punto de referencia (P^{t}). La amplitud o distancia en tiempo entre los dos puntos de referencia esta simbolizada por la letra *a*, donde la misma se obtiene buscando la diferencia entre las dos fechas. Según las fechas de los censos arriba mencionados la amplitud entre uno y el otro censo es de 10 años. Por consiguiente, la tasa de crecimiento poblacional geométrico para el período 1990-2000 podría calcularse conforme las ecuaciones (6) y (7), veamos:

$$r = \left(\frac{P^{2000}}{P^{1990}}\right)^{1/a} - 1 \qquad r = \sqrt[a]{\left(\frac{P^{2000}}{P^{1990}}\right)} - 1$$

$$r = (3808610 \div 3522037)^{1/10} - 1 \qquad r = \sqrt[10]{(3808610 \div 3522037)} - 1$$

$$r = (1.081365698)^{0.1} - 1 \qquad r = \sqrt[10]{(1.081365698)} - 1$$

$$r = 1.007853153 - 1 \qquad r = 1.007853153 - 1$$

$$r = .007853153 \qquad r = .007853153$$

$$r = .007853153 \times (100) \qquad r = .007853153 \times (100)$$

$$r = .78561 \approx .79\% \qquad r = .78561 \approx .79\%$$

Al calcular el crecimiento poblacional de Puerto Rico entre el año 1990 y el año 2000, bajo la modalidad geométrico, encontramos que la misma fue de r=.007853153 pero al aplicarle el por ciento decimos que la tasa de crecimiento geométrico fue .79 por ciento. De forma concluyente podemos indicar que la tasa de crecimiento (r) poblacional de .79 por ciento nos sugiere que en Puerto Rico entre el 1990 al 2000 el incremento anual poblacional fue de 7.9 personas por cada 1000 habitantes.

Tasa de Crecimiento Geométrico simplificado (Bocaz)

Otro método para obtener la tasa de crecimiento geométrico es evitando el uso de los logaritmos y cuando el período de tiempo no es muy largo (5 a 10 años), se sugiere la utilización de la expresión simplificada de *Albino-Bocaz*, veamos:

$$r = \left(\frac{2}{k}\right) \times \left(\frac{P^{t+n} - P^{t}}{P^{t+n} + P^{t}}\right) \tag{8}$$

donde

r Tasa de crecimiento anual geométrico *(simplificado de Bocaz).*

P^{t+n} Población al momento actual.

P^{t} Población al momento inicial o población base o población inicial.

a La amplitud o distancia en tiempo entre las dos poblaciones de referencia.

Referente a Puerto Rico, si tomando la población según el censo de 1990 con una población al 1ro de abril de 3,522,037 y para el censo de 2000 la población del con una población al 1ro de abril de 3,808,610 podemos bajo el supuesto geométrico desarrollar la tasa de crecimiento aplicando el método de simplificación de *Albino-Bocaz*, utilizando la ecuación (8), veamos:

$$r = \left(\frac{2}{a}\right) \times \left(\frac{\mathrm{P}^{2000} - \mathrm{P}^{1990}}{\mathrm{P}^{2000} + \mathrm{P}^{1990}}\right)$$
$$r = \left(\frac{2}{10}\right) \times \left(\frac{3808610 - 3522037}{3808610 + 3522037}\right)$$
$$r = .2 \times \left(\frac{286573}{7330647}\right)$$
$$r = .2 \times (.039092457)$$
$$r = .007818491$$

$$r = .007818491 \times 100$$
$$r = .7818491 \approx .78\%$$

La tasa de crecimiento (*r*) obtenida bajo la modalidad geométrica del método simplificado de *Albino-Bocaz* (*r*=.78 por ciento) se puede interpretar que entre el periodo del 1990 al 2000 como incremento anual la población de Puerto Rico aumento 7.8 personas por cada 1000 habitantes.

Tasa de Crecimiento Exponencial

Exponential growth rate (Eng)
Taux de croissance exponentielle (Fra)

A diferencia del modelo geométrico el modelo exponencial supone que el crecimiento se produce en forma continua y no cada unidad de tiempo. Este supuesto obliga a sustituir la expresión "$(1 + r)a$" por "$\mathrm{Exp}(r \cdot a)$". La justificación de esta sustitución se fundamenta en principios del Cálculo Matemático, y su demostración no será evidenciado en este documento. La fórmula para la tasa de crecimiento poblacional bajo el supuesto exponencial pueden ser varias, veamos:

$$r = \frac{ln\mathrm{P}^{t+n} - ln\mathrm{P}^{t}}{a} \quad (9)$$

$$r = \frac{ln(\mathrm{P}^{t+n} \div \mathrm{P}^{t})}{a} \quad (10)$$

$$r = \frac{1}{a} ln(\mathrm{P}^{t+n} \div \mathrm{P}^{t}) \quad (11)$$

donde

r Tasa de crecimiento anual exponencial.

P^{t+n} Población al momento actual.

P^{t} Población al momento inicial o población base o población inicial.

a La amplitud o distancia en tiempo entre las dos poblaciones de referencia.

ln Logaritmo natural.

Referente a Puerto Rico, si tomando la población según el censo de 1990 con una población al 1ro de abril de 3,522,037 y para el censo de 2000 con una población al 1ro de abril de 3,808,610 podemos bajo el supuesto exponencial desarrollar la tasa de crecimiento. Según las fechas de los censos arriba mencionados la amplitud entre uno y el otro censo es de 10 años. Por consiguiente, la tasa de crecimiento poblacional exponencial para el período 1990-2000 podría calcularse conforme las ecuaciones (9), (10) y (11), veamos:

$$r = \frac{ln\mathrm{P}^{2000} - ln\mathrm{P}^{1990}}{a}$$
$$r = \left(\frac{ln3808610 - ln3522037}{10}\right)$$
$$r = \left(\frac{15.15277485 - 15.07455007}{10}\right)$$
$$r = \left(\frac{.078224778}{10}\right)$$
$$r = .007822478$$
$$r = .007822478 \times (100)$$
$$r = .7822478 \approx .78\%$$

$$r = \frac{ln(\mathrm{P}^{2000} \div \mathrm{P}^{1990})}{a}$$
$$r = \left(\frac{ln(3808610 / 3522037)}{10}\right)$$
$$r = \left(\frac{ln(1.081365698)}{10}\right)$$
$$r = \left(\frac{.078224778}{10}\right)$$
$$r = .007822478$$
$$r = .007822478 \times (100)$$
$$r = .7822478 \approx .78$$

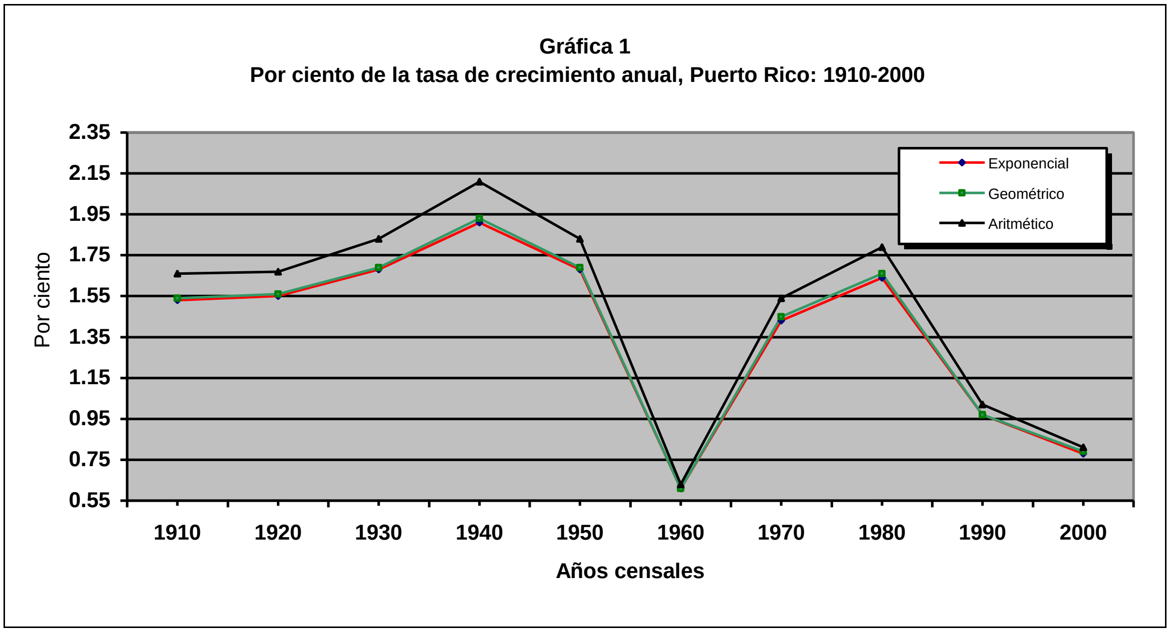
$$r = \frac{1}{a} ln(\mathrm{P}^{2000} \div \mathrm{P}^{1990})$$
$$r = \frac{1}{10} ln(3808610 \div 3522037)$$
$$r = .1 \times ln(1.081365698)$$
$$r = .1(.078224778)$$
$$r = .007822478$$
$$r = .007822478 \times (100)$$
$$r = .7822478 \approx .78\%$$

Según estos resultados se puede indicar que la tasa de crecimiento (r) poblacional de 0.78 por ciento nos sugiere que en Puerto Rico entre el 1990 al 2000 el incremento anual poblacional fue de 7.8 personas por cada 1000 habitantes.

Según la tabla 1 podemos visualmente comparar los resultados de cada uno de los modelos matemáticos utilizados para obtener la tasa de crecimiento. El modelo aritmético (lineal) tiende a ser más grande que los otros dos modelos. Por lo general el modelo geométrico y exponencial tiende a parecerse.

Tabla 1. Diferentes tasa de crecimiento anual, Puerto Rico: 1910 – 2000.

Años *t*	Amplitud *a*	Población P	Tasa de Crecimiento Anual %		
			Aritmético	*Geométrico*	*Exponencial*
Nov. 10,1899	****	953,243	****	****	****
Abril 15, 1910	10.43	1,118,012	1.66	1.54	1.53
Enero 1, 1920	9.71	1,299,809	1.67	1.56	1.55
Abril 1, 1930	10.25	1,543,913	1.83	1.69	1.68
Abril 1, 1940	10	1,869,225	2.11	1.93	1.91
Abril 1, 1950	10	2,210,703	1.83	1.69	1.68
Abril 1, 1960	10	2,349,544	0.63	0.61	0.61
Abril 1, 1970	10	2,712,033	1.54	1.45	1.43
Abril 1, 1980	10	3,196,520	1.79	1.66	1.64
Abril 1, 1990	10	3,522,037	1.02	0.97	0.97
Abril 1, 2000	10	3,808,610	0.81	0.79	0.78



Fuente: Gráfico elaborado por el Dr. Arnaldo Torres con datos obtenidos de la tabla 1.

Aplicación de la Tasa de Crecimiento en grupos específicos

Es posible aplicar la tasa de crecimiento a grupos poblacionales con ciertas características homogéneas (género, estado civil, educación, fuerza trabajadora, entre otros) o por grandes grupos etáreos (población joven, población adulta, población vieja, población femenina en edad reproductiva, entre otras). Para poder aplicar la tasa de crecimiento a diversas poblaciones evaluaremos la población femenina y la población de viejos de 65 años o más.

Referente a Puerto Rico, si tomando la población femenina según el censo de 1990 con una cantidad al 1^ro de abril de 1,816,395 mujeres y la población femenina del censo de 2000 con una cantidad al 1^ro de abril de 1,975,033 mujeres podemos desarrollar la tasa de crecimiento. No olvidemos que para la tasa de crecimiento es necesario dos poblaciones de referencia: una población de referencia se le considera como población base o punto de referencia (P^t). La amplitud o distancia en tiempo entre los dos puntos de referencia esta simbolizada por la letra a, donde la misma se obtiene buscando la distancia entre las dos fechas. Según las fechas de los censos arriba mencionados la amplitud entre uno y el otro censo es de 10 años. Por consiguiente, la tasa de crecimiento poblacional femenina para el período 1990-2000 podría calcularse conforme la modalidad lineal o aritmética utilizando la ecuación (3), la modalidad geométrica utilizando la ecuación (7) y la modalidad exponencial utilizando la ecuación (9), veamos:

Aritmético	Geométrico	Exponencial
$r = \frac{P^{t+n} - P^{t}}{a(P^{t})}$	$r = \sqrt[a]{\left(\frac{P^{t+n}}{P^{t}}\right)} - 1$	$r = \frac{lnP^{t+n} - lnP^{t}}{a}$

$$r = \frac{Pf^{2000} - Pf^{1990}}{a(Pf^{1990})}$$
$$r = \frac{1975033 - 1816395}{10 \times 1816395}$$
$$r = \frac{158638}{18163950}$$
$$r = .008733673$$
$$r = .008733673 \times (100)$$
$$r = .8733673 \approx .87\%$$

$$r = \sqrt[a]{\left(\frac{Pf^{2000}}{Pf^{1990}}\right)} - 1$$
$$r = \sqrt[10]{(1975033 \div 1816395)} - 1$$
$$r = \sqrt[10]{(1.08733673)} - 1$$
$$r = 1.008408287 - 1$$
$$r = .008408287$$
$$r = .008408287 \times (100)$$
$$r = .840828668 \approx .84\%$$

$$r = \frac{lnPf^{2000} - lnPf^{1990}}{a}$$
$$r = \left(\frac{ln1975033 - ln1816395}{10}\right)$$
$$r = \left(\frac{14.49609567 - 14.41236433}{10}\right)$$
$$r = \left(\frac{.08373134}{10}\right)$$
$$r = .008373134$$
$$r = .0083731348 \times (100)$$
$$r = .8373134 \approx .84\%$$

De forma concluyente podemos indicar que la tasa de crecimiento (*r*) de la población femenina de .87 por ciento nos sugiere que en Puerto Rico entre el 1990 al 2000 el incremento anual poblacional femenino fue de 8.7 mujeres por cada 1000 mujeres.

Por otro lado en Puerto Rico, si tomando la población de 65 años o más, que según el censo de 1990 al 1ro de abril la cantidad era de 340,884 personas y la población de 65 años o más al 1ro de abril del censo del 2000 la cantidad era de 425,137 personas, es posible desarrollar la tasa de crecimiento. Por consiguiente, la tasa de crecimiento poblacional vieja (65 años o más) para el período 1990-2000 podría calcularse conforme la modalidad lineal o aritmética utilizando la ecuación (3), la modalidad geométrica utilizando la ecuación (7) y la modalidad exponencial utilizando la ecuación (9), veamos:

Aritmético	Geométrico	Exponencial
$r = \dfrac{P^{t+n} - P^{t}}{a(P^{t})}$	$r = \sqrt[a]{\left(\dfrac{P^{t+n}}{P^{t}}\right)} - 1$	$r = \dfrac{lnP^{t+n} - lnP^{t}}{a}$

$$r = \frac{P_{65+}^{2000} - P_{65+}^{1990}}{a(P_{65+}^{1990})}$$

$$r = \frac{425137 - 340884}{10 \times 340884}$$

$$r = \frac{84253}{3408840}$$

$$r = .024716032$$

$$r = .024716032 \times (100)$$

$$r = 2.4716032 \approx 2.47\%$$

$$r = \sqrt[a]{\left(\frac{P_{65+}^{2000}}{P_{65+}^{1990}}\right)} - 1$$

$$r = \sqrt[10]{(425137 \div 340884)} - 1$$

$$r = \sqrt[10]{(1.247160324)} - 1$$

$$r = 1.022332644 - 1$$

$$r = .022332644$$

$$r = .022332644 \times (100)$$

$$r = 2.2332664 \approx 2.23\%$$

$$r = \frac{lnPf^{\,2000} - lnPf^{\,1990}}{a}$$

$$r = \left(\frac{ln425137 - ln340884}{10}\right)$$

$$r = \left(\frac{12.96016675 - 12.73929752}{10}\right)$$

$$r = \left(\frac{.22086923}{10}\right)$$

$$r = .022086923$$

$$r = .022086923 \times (100)$$

$$r = 2.2086923 \approx 2.21\%$$

Podemos concluir que la tasa de crecimiento (r) de la población vieja (65 años o más) de 2.47 por ciento nos sugiere que en Puerto Rico entre el 1990 al 2000 el incremento anual fue de 24.7 personas viejas por cada 1000 personas viejas.

Tiempo de Duplicación

Doubling time (Eng)
Temps de doublement (Fra)

El crecimiento expresado en porcentajes no es un concepto descriptivo aplicable a muchos fines. ¿Es una tasa de crecimiento del 2.5 por ciento lenta o acelerada? Una manera más clara de ilustrar el crecimiento de la población es calcular cuánto tiempo le tomaría a dicha población duplicarse conforme a la tasa actual de crecimiento. Esta medida brinda información interesante respecto al ritmo de crecimiento de la población, suponiendo que éste sea constante en el tiempo. Como veremos más adelante, un país que tiene una tasa de crecimiento constante del 1 por ciento duplicaría el tamaño de su población en aproximadamente 70 años; al 2 por ciento, en 35 años; al 3 por ciento, en 23 años.

Cuadro 7: Años de duplicación para diversas tasas de crecimiento			
Tasa de crecimiento *r* (%)	Año de duplicación *t*	Tasa de crecimiento *r* (%)	Año de duplicación *t*
6.0	12	1.0	70
5.0	14	0.5	140
4.0	18	0.4	175
3.0	23	0.3	233
2.5	28	0.2	350
2.0	35	0.1	700
1.5	47	0.05	1400

Es decir, cuando aumenta la tasa de crecimiento, el tamaño de la población a duplicarse se reduce, mientras que cuando la tasa de crecimiento se reduce, el tamaño de la población a duplicarse se amplia.

No olvidemos que el tiempo de duplicación no puede utilizarse para proyectar el tamaño futuro de una población porque el mismo supone una tasa de crecimiento constante a través de las décadas, mientras que las tasas de crecimiento cambian. No obstante, calcular el tiempo de duplicación ayuda a ilustrar cuán rápidamente está creciendo una población actualmente. El tiempo de duplicación de la población de un lugar puede obtenerse mediante dos formas: partiendo de la ecuación de crecimiento geométrico y del método de los 70 años.

Tiempo de Duplicación
Ecuación de crecimiento geométrico

Partiendo de la ecuación de crecimiento geométrico, es posible modificar la expresión asumiendo que el tiempo de duplicación estaría dada por el logaritmo natural dos (.693147181) entre la tasa de crecimiento. La formula estará dado por:

$$t = \frac{ln2}{r} \quad = \quad t = \frac{0.693147181}{r} \tag{12}$$

donde

t Tiempo de duplicación de la población.

r Tasa de crecimiento anual en su expresión natural, no en por ciento (aritmética, geométrica o exponencial)

ln Logaritmo natural.

Observemos que si la tasa de crecimiento esta expresada en por cientos es necesario dejarla en su expresión natural, si la intención es buscar el tiempo de duplicación con dicho método. No se debe utilizar el por ciento de la tasa de crecimiento. Si nos referimos a la tasa de crecimiento poblacional aritmético de Puerto Rico entre el año 1990 y el año 2000 donde la misma fue de .00813657 pero al aplicarle el por ciento decimos que el por ciento de r=.813657 y nos interesa calcular el tiempo de duplicación con el método de ecuación de crecimiento geométrico, la tasa de crecimiento poblacional (r) ha utilizarse es la que no se ha expresado en por ciento. Una vez tengamos la tasa de crecimiento adecuada, el tiempo de duplicación estaría dado por,

$$\begin{aligned} t &= \frac{2ln}{r} \\ t &= \frac{0.693147181}{.00813657} \\ t &= 85.1890907 \\ t &\approx 85.19 \end{aligned}$$

donde la población se duplicaría en 85.19 años. Es decir, si la tasa de crecimiento aritmética de 0.00813657 reflejada durante el periodo de 1990 al 2000 continuara sin cambios, la población de Puerto Rico se duplicaría en aproximadamente 85 años. No olvidemos que el tiempo de duplicación no puede utilizarse para proyectar el tamaño futuro de una población pero su cálculo ayuda a ilustrar cuán rápidamente está creciendo una población actualmente.

Tiempo de Duplicación
Método de los 70 años

Es un método práctico y da resultados muy parecidos al método antes discutido. Una manera rápida de aproximar el período de duplicación es dividir 70 por la tasa de crecimiento expresada como un porcentaje.

$$t = \frac{70}{r} \tag{13}$$

donde

t Tiempo de duplicación de la población.

r Tasa de crecimiento anual en por ciento (aritmética, geométrica o exponencial)

Esto es posible ya que la constante 70 es producto de la multiplicación del logaritmo natural 2 (*ln*2) por 100, es decir 0.693147 X 100 = 69.3147 y se toma como aproximación de este resultado el valor 70. Observemos que la tasa de crecimiento debe estar expresada en por cientos, si la intención es buscar el tiempo de duplicación con dicho método. Si nos referimos a la tasa de crecimiento poblacional aritmético de Puerto Rico entre el año 1990 y el año 2000 donde la misma fue de .00813657 pero al aplicarle el por ciento decimos que r=.813657 por ciento y nos interesa calcular el tiempo de duplicación con el método de 70 años, la tasa de crecimiento poblacional (r) ha utilizarse es la expresada en por ciento. Una vez tengamos la tasa de crecimiento adecuada, el tiempo de duplicación estaría dado por,

$$\begin{aligned} t &= \frac{70}{r} \\ t &= \frac{70}{.813657} \\ t &= 86.03133753 \\ t &\approx 86 \end{aligned}$$

donde la población se duplicaría en 86.03 años. O sea, si la tasa de crecimiento aritmética de 0.813657 por ciento reflejada durante 2000 continuara sin cambios, la población de Puerto Rico se duplicaría en aproximadamente 86 años. Es decir con una tasa anual de crecimiento del .81 por ciento en el 2000, Puerto Rico necesitaría aproximadamente 86 años para duplicar su población.

Referencias

U.S. War Deparment, (1900). *Report on the Census of Puerto Rico, 1899*, Washington, D. C.

U.S. Bureau of the Census (1910). *Thirteenth Census of the United States, 1910*. Statistics for Puerto Rico.

______. (1920). *Fourteen the Census of the United States, 1920*. Population of Outlying Possessions.

______. (1930). *Fifteenth Census of the United States, 1930*. Outlying Territories and Possessions.

______. (1940). *Sixteenth Census of the United States, 1940*. Puerto Rico.

______. (1950). *United States Census of Population, 1950*. Puerto Rico.

______. (1960). *United States Census of Population, 1960*. Puerto Rico.

______. (1970). *United States Census of Population, 1970*. Puerto Rico.

______. (1980). *United States Census of Population, 1980*. Puerto Rico.

______. (1990). *United States Census of Population, 1990*. Puerto Rico.

______. (2000). *United States Census of Population, 2000*. Puerto Rico.