Dos definiciones de Completitud

MARIAN PALERM DE SETIEN

El concepto de un cuerpo ordenado completo es definido de diferentes formas por muchos autores. Estas definiciones, aunque tratadas de maneras distintas, deben ser equivalentes en el sentido de que todo cuerpo ordenado que satisfaga una definición debe satisfacer la otra.

En este trabajo veremos en detalle dos de estas definiciones de completitud y estudiaremos una sutil discrepancia entre ellas. Aunque sólo mencionamos un ejemplo de un cuerpo ordenado que es completo bajo una definición y no es completo bajo la otra, creemos en la posibilidad de la existencia de otros, y consideramos el problema interesante para la formalidad envuelta.

Definición 1

Un cuerpo ordenado C es completo si satisface el Axioma de Completitud, que dice que todo subconjunto no vacío S de C que tenga una cota superior, tiene una cota superior mínima. (4) (2)

Definición 2

Un cuerpo ordenado C es completo, si toda sucesión de Cauchy en C, converge a un elemento c de C. (1)

El cuerpo ordenado $\mathcal{R}$ de los números reales, obviamente satisface ambas definiciones de completitud.

Para entender nuestra exposición incluiremos, a continuación, una definición y un teorema.

Definición 3

Sea N el conjunto de los números naturales (2). Un cuerpo ordenado C tiene la propiedad Arquimideana, si para cualquiera a, b ϵ C, donde $o < a < b$, existe n ϵ N, tal que $n \cdot a \geqslant b$.

Teorema I

Ley de Arquímedes: Un cuerpo ordenado completo C (según la definición 1) es arquimideano.

Prueba:

Vamos a suponer que esta conclusión es falsa. Sean a y b dos elementos particulares positivos del cuerpo completo C, tales que, para todo n ϵ N, $b \geqslant n \cdot a$. El conjunto S de todos los múltiplos n a tiene entonces la cota superior b. Por el Axioma de Completitud, S tiene una cota superior mínima b^*. Entonces $b^* \geqslant n \cdot a$ para cada n ϵ N, así que $b^* \geqslant (n+1)\,a$. Esto implica que $b^* - a \geqslant n\,a$, así que $b^* - a$ es una cota superior de todos los múltiplos n a. Pero $b^* - a < b^*$, pues $a > o$. Esto es una contradicción, ya que habíamos dicho que b^* era la cota superior mínima.

Ahora veremos un ejemplo de un cuerpo ordenado, que bajo la definición 1 no es un cuerpo ordenado completo, pero bajo la definición 2 sí lo es.

Sea K el conjunto de todas las series de potencia $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$, donde j es entero, $r_j \epsilon \mathcal{R}$ para cada j; y para algún entero h, $r_j = 0$ si $j < h$.

Se definen suma, multiplicación y orden de la siguiente forma:

Suma: $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} (r_j + s_j) x^j$.

Multiplicación: $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p+q=j} r_p s_q \right) x^j$.

Orden: $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j < \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j$, si existe un entero k, tal que $r_j = s_j$, para toda $j < k$, y $r_k < s_k$.

Proposición 1

El conjunto K, según lo hemos definido, forma un cuerpo ordenado no arquimideano.

Prueba:

Sean $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$, $\sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j$, $\sum_{-\infty}^{\infty} t_j x^j$ elementos de K.

A. K es un grupo conmutativo bajo suma, pues satisface los siguientes requisitos:

$$\begin{aligned} R_1:\ & \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j + \left(\sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} t_j x^j \right) = \\ & \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} (s_j + t_j)\, x^j = \\ & \sum_{-\infty}^{\infty} [r_j + (s_j + t_j)]\, x^j = \\ & \sum_{-\infty}^{\infty} [(r_j + s_j) + t_j]\, x^j = \\ & \sum_{-\infty}^{\infty} (r_j + s_j)\, x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} t_j x^j = \\ & \left(\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j \right) + \sum_{-\infty}^{\infty} t_j x^j. \end{aligned}$$

R_2: Sea $\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_j x^j$, donde $\mu_j = 0$ para cada j.

Entonces, $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_j x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} (r_j + \mu_j)\, x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} (r_j + 0)\, x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$.

R_3: Para cada $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$, existe $\sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j$ donde

$s_j = -r_j$ para cada j, de forma que,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} (r_j + s_j)\, x^j =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (r_j + (-r_j))\, x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} 0x^j = \theta.$$

R_4: $$\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} (r_j + s_j)\, x^j$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} (s_j + r_j)\, x^j$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j.$$

B. K es un cuerpo, ya que satisface los siguientes requisitos.

R_5: K es un grupo conmutativo bajo suma.

R_6: Sean $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$, $\sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j$ elementos de K.

Entonces, $$\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=j} r_p s_q \Big) x^j$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{q+p=j} s_q r_p \Big) x^j$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j \cdot \sum r_j x^j$$

R_7: $$\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \Big(\sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} t_j x^j \Big) =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} (s_j + t_j)\, x^j =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=j} r_p (s_q + t_q) \Big) x^j =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=j} (r_p s_q + r_p t_q) \Big) x^j =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \Big(\Big(\sum_{p+q=j} r_p s_q \Big) x^j + \Big(\sum_{p+q=j} r_p t_q \Big) x^j \Big) =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=j} r_p s_q \Big) x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=j} r_p t_q \Big) x^j =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} t_j x^j.$$

Llamaremos e al elemento $\sum_{-\infty}^{\infty} i_j x^j$ donde $i_j = 1$ para $j = 0$, y $i_j = 0$ para toda $j \neq 0$. De esta forma $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot e = \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} i_j x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$.

Todo elemento $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$ de $K - \{\theta\}$ tiene un inverso multiplicativo $\sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j$, de manera que $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = e$. Veamos esto. Sabemos que $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=1} r_p s_q \Big) x^j$, y queremos que $\sum_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{p+q=j} r_p s_q \Big) x^j = 1$, o sea que si tenemos $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \neq \theta$, debemos hallar $\sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j$ tal que $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = 1$. Por lo tanto, queremos que $\sum_{p+q=j} r_p s_q = 1$ para $p+q=j=0$, y que $\sum_{p+q=j} r_p s_q = 0$ para $p+q=j\neq 0$. Sea $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j = r_n x^n + r_{n+1} x^{n+1} + \ldots$, $n \in Z$. Veamos los términos de $\sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j$ donde $p+q=0=j$. El término $s_{-n} x^{-n} = (r_n)^{-1} x^{-n}$ es el primer término de $\sum s_j x^j$, ya que $((r_n)^{-1} x^{-n})(r_n x^n) = 1 \cdot x^0 = 1$ y $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$ comienza en n. Este término es el único donde $p+q=0$. Ahora, veamos los términos de $\sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j$ donde $p+q\neq 0$. Si $p+q=1$, tenemos $(r_n s_{-n+1} + r_{n+1} s_{-n})\, x' = 0x'$. Esta ecuación es lineal, y conocemos r_n, r_{n+1}, s_{-n}, así que podemos hallar s_{-n+1}. Si $p+q=j=2$, tenemos que $(r_n s_{-n+2} + r_{n+1} s_{n+2} + r_{n+2} s_{-n})\, x^2 =$

$0x^2$. Conocemos $r_n, r_{n+1}, r_{n+2}, s_n, s_{n+1}$, por lo tanto podemos hallar s_{n+2}. De esta manera, como conocemos cada término de $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$, resolviendo estas ecuaciones lineales una por una, iremos conociendo todos los términos de $\sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j$, de manera que $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = e$. Por lo tanto, todo elemento de $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$ de $K - \{\theta\}$, tiene un inverso multiplicativo.

K tiene un subconjunto P, donde P es el conjunto de todas las $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$, donde $r_j = 0$ para toda $j < k$, y donde $r_k > 0$. Para este conjunto P, al que llamamos el conjunto positivo de K, se satisfacen los siguientes requisitos:

R_8: $(\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j, \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j \in P) \to \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j \in P$, ya que $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j + \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} (r_j + s_j)\, x^j$ por definición de suma, y donde $(r_j + s_j) > 0$ para el primer término donde $r_j + s_j \neq 0$.

R_9: $(\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j, \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j \in P) \to \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j \in P$, ya que $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = \sum_{-\infty}^{\infty} (\sum_{p+q=j} r_p s_q)\, x^j$, donde $r_p s_q > 0$ para el primer $r_p s_q \neq 0$.

R_{10}: $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \in P \to - \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \notin P$.

R_{11}: $(\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j\ K) \to (\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j = 0)$ si cada $r_j = 0$ para toda j; o $(\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \in P)$ si $r_j = 0$ para toda $j < k$, y $r_k > 0$; o $(- \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j \in P)$ si $r_j = 0$ para toda $j < k$ y $r_k < 0$.

De esta forma hemos visto que K es un cuerpo ordenado. Ahora, veremos que el cuerpo ordenado K no es arquimideano.

Sea $a = \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j = 0x^0 + r_1 x^1 + r_2 x^2 + \ldots$ donde $r_j \neq 0$ para alguna $j > 0$, y sea $b = \sum_{-\infty}^{\infty} s_j x^j = 1x^0 + s_1 x^1 + s_2 x^2 + \ldots$

Por la definición de ordenación de K, $0 < a < b$. Entonces,

$$n \cdot a = n\,(0x^0 + r_1 x^1 + r_2 x^2 + \ldots)$$
$$= 0x^0 + nr_1 x^1 + nr_2 x^2 + \ldots$$
$$< 1x^0 + s_1 x^1 + s_2 x^2 + \ldots = b.$$

Por lo tanto, $n \cdot a < b$, $\forall\, n$, así que K no satisface la Propiedad Arquimideana. Entonces, el cuerpo ordenado K no es un cuerpo ordenado completo según la definición 1 ya que el Teorema 1 nos dice que, todo cuerpo ordenado completo, según esta definición, es arquimideano.

Es útil hacer notar que en K, $| \sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j |$ es una serie donde el coeficiente del primer término de $\sum_{-\infty}^{\infty} r_j x^j$ que no sea cero, será el valor absoluto de ese coeficiente.

Teorema 2

Toda sucesión de Cauchy en K converge a un elemento de K.

Prueba:

Una sucesión de Cauchy en K es una sucesión $(r_i) = (\sum_j r_{ji} x^j)$ tal que para todo $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, $(\epsilon = \sum_j e_j x^j)$, existe $n_\epsilon \in N$ tal que para todo $n, m \in N$; $n, m > n_\epsilon$,

$$| \Sigma\, r_{jn}x^j - \Sigma\, r_{jm}x^j | = | \Sigma\, (r_{jn} - r_{jm})\, x^j | < \epsilon.$$

El signo "<" se interpreta en K en la siguiente forma: Que μ sea el suscrito del primer coeficiente en ϵ que no es cero. Que λ sea el suscrito del primer coeficiente en $| \Sigma\, (r_{jn} - r_{jm})\, x^j |$ que no es cero.

Entonces, $\lambda > \mu$, o $\lambda = \mu$ y $|r_{\lambda n} - r_{\lambda m}| < e_{\mu}$, para que se satisfaga la desigualdad.

Definimos $s = \sum_j s_j x^j$ de la siguiente forma:

Sea $\epsilon_m = x^{m+1}$.

Sea s_m el coeficiente de x^m en cada término de (r_i) tal que $i > n_{\epsilon_m}$.

Entonces, dado un $\epsilon > 0$, existe μ_ϵ de forma que si $l < \mu_\epsilon$, el coeficiente de x^l en ϵ es 0, y el coeficiente de x^{μ_ϵ} es positivo.

Entonces, si $k > n_{\epsilon_{\mu_\epsilon}}$, entonces

$$| s - r_k | < \epsilon_{\mu_\epsilon} < \epsilon.$$

Bueno, como en K toda sucesión de Cauchy converge, el cuerpo ordenado K es un cuerpo ordenado completo según la definición 2.

Creemos necesario aclarar la diferencia entre ambas definiciones para cuerpo ordenado completo. Hemos visto que el cuerpo ordenado K es completo según la definición 2, y no es completo según la definición 1.

Para que ambas definiciones de completitud sean equivalentes, en el sentido de que todo cuerpo ordenado que satisfaga una definición satisfaga la otra, es necesario añadirle, en la definición 2, la Propiedad Arquimideana al cuerpo ordenado C.

Entonces, probaremos la siguiente equivalencia.

(i) Cada subconjunto no vacío de un cuerpo ordenado C, que tenga una cota superior, tiene una cota superior mínima en C.

(ii) El cuerpo ordenado C es arquimideano, y toda sucesión de Cauchy en C, tiene un límite a en C.

Prueba:

(i) → (ii)

Por el Teorema 1, vemos que (i) implica que C es arquimideano. Ahora, cada sucesión de Cauchy $\{a_n\}$ en C, está acotada en C, como en cualquier cuerpo ordenado. Esto es claro, ya que si ponemos $\epsilon = 1$ en la definición de una sucesión de Cauchy, tenemos: $\text{mín}\,\{a_1, a_2, ..., a_n - 1\} \leqslant a_k \leqslant \text{máx}\,\{a_2, ..., Q_n + 1\}$, para toda a_k en esta sucesión.

Entonces, en C, los elementos x_n = cota superior mínima $\{a_k | k > n\}$ existen por (i). Pero la sucesión $\{x_n\}$ es no creciente por definición. Entonces, el límite de $\{x_n\} = x$, para alguna $x \epsilon C$. Como $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy, tenemos que para todo $\epsilon > 0$, $|a_k - x| \leqslant |a_k - x_k| + |x_k - x| < \epsilon$ para toda $k \geqslant n$, para $n \epsilon N$ bastante grande. Entonces $\lim a_k = x \epsilon C$.

(ii) → (i)

Sea $X \epsilon C$, $X \neq \emptyset$, b una cota superior de X, y $\overline{x} \epsilon X$. Como C es arquimideano, existe, para cada $n \epsilon N$, algún $\overline{m} \epsilon N$, tal que $\overline{x} + \frac{\overline{m}}{n} \geqslant b$ en C. Entonces $\overline{x} + \frac{\overline{m}}{n}$ es una cota superior de X. Para cada $n \epsilon N$, el conjunto $\beta_n = \{m \,|\, \overline{x} + \frac{m}{n}$ es una cota superior de $X\}$ es un subconjunto no vacío de N, y tiene un elemento natural mínimo m_n por deficinión (4). Entonces, para cada $n \epsilon N$,

1) $y_n = \bar{x} + \frac{m_n}{n}$ es una cota superior de X,

2) $x_n = \bar{x} + \frac{m_n - 1}{n} = y_n - \frac{1}{n} \leqslant x$ en C para alguna $x \in X$.

Luego, $x_m < y_n$, pues $x_m < x \in X$ y $x < y_n$. Entonces, $x_m - x_n < y_n - (y_n - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, y $|x_m - x_n| = \text{máx}\left\{x_m - x_n, x_n - x_m\right\} \leqslant \text{máx}\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$ en C para toda $n, m \in N$.

Pero, como $\lim \frac{1}{n} = 0$ en el cuerpo arquimideano C(2), $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en C. Entonces, por hipótesis, $\{x_n\}$ tiene un límite a en C.

Proposición 2

a es la cota superior mínima de X.

Prueba:

Asumamos $a < x$ para alguna $x \in X$. Como $\lim \{x_n\} = a$, y $\lim \left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$, existe $n \in N$; tal que $x_n - a \leqslant |x_n - a| < \frac{x-a}{2}$, y $\frac{1}{n} < \frac{x-a}{2}$ en C, para alguna $x \in X$. Entonces, $y_n = x_n + \frac{1}{n} < (a + \frac{x-a}{2}) + \frac{x-a}{2} = x \in C$. Esto es imposible, pues $x \in X$, y habíamos visto que y_n es una cota superior de X. Por lo tanto, a es una cota superior de X.

Además, si c es una cota superior de X, entonces $a \leqslant c$ en C. Si no fuera así, $a - c > 0$ en C. Entonces, para alguna $n \in N$, $a - x_n \leqslant |a - x_n| < a - c$ en C, y $c < x_n \leqslant x$ en C, para alguna $x \in X$. Esto no es posible, pues c es una cota superior de X.

Como hemos visto, nuestro problema ha consistido en que las dos definiciones de completitud, que parecen ser las más comunes

en los cursos de Algebra y Análisis, no son equivalentes por una condición. Esta condición es la propiedad arquimideana, y vimos la discrepancia existente con un ejemplo.

En general, creemos que en matemáticas necesitamos definiciones equivalentes para un mismo término. Podríamos preguntarnos entonces cuál sería la definición más conveniente.

Bueno, el cuerpo ordenado completo que más usamos es el cuerpo de los números reales. Este cuerpo nos ayuda a establecer un criterio. Como los números reales tienen la propiedad arquimideana, creemos que para definir un cuerpo ordenado completo se debe incluir esta propiedad, y así todo cuerpo ordenado será isomórfico a los reales.

Leyenda

1) $a \in A$	,a es el elemento del conjunto A
2) $a \notin A$	, a no es elemento del conjunto A
3) $a < b$	,a es menor de b
4) $a \leqslant b$	,a es menor o igual a b
5) $a > b$	,a es mayor de b
6) $a \geqslant b$	,a es mayor o igual a b
7) θ	,identidad aditiva del conjunto K
8) $\rightarrow$	,implica
9) $\forall$	,para todo
10) Φ	,conjunto vacío

REFERENCIAS

1. Cohen, Erhlich, *The Structure of the Real number System*, D. Van Nostrand Co., Inc., 1963.
2. McLane, Birkhoff, *Algebra*, Mac Millan Co., 1967.
3. Mc Shane, Botts: *Real Analysis*, D. Van Nostrand Co., Inc., 1959.
4. Royden, *Real Analysis*, Mac Millan Co., Inc., 1963.
5. Saxena, Shah, *Introduction to Real Variable Theory*, Intext Educational Publishers, 1972.